俄罗斯数学
教材选译

● 数学天元基金资助项目

# 偏微分方程习题集

## （第2版）

□ A. C. 沙玛耶夫 主编
□ 郭思旭 译

高等教育出版社
Higher Education Press

**图字: 01–2008–2624 号**

Сборник задач по уравнениям с частными производными, авторы А. С. Шамаев (ред.) и др., 2-е издание, испр., первоначально опубликовано на русском языке в 2007 г. Данный перевод публикуется в соответствии с договором с издательством БИНОМ. Лаборатория знаний.

A. C. 沙玛耶夫等编写的《偏微分方程习题集》(第 2 版) 俄文版于 2007 年出版, 本翻译版的出版由 BINOM. Knowledge Laboratory Publishers 授权许可.

© 2007, БИНОМ. Лаборатория знаний

**图书在版编目 (CIP) 数据**

偏微分方程习题集 (第 2 版) / (俄罗斯) 沙玛耶夫主编; 郭思旭译. —北京: 高等教育出版社, 2009.3

ISBN 978–7–04–025766–3

I.偏… II.①沙…②郭… III.偏微分方程–高等学校–习题 IV. 0175.2–44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 021901 号

**策划编辑** 赵天夫 **责任编辑** 赵天夫 **封面设计** 王凌波
**责任印制** 朱学忠

| | | | |
|---|---|---|---|
| **出版发行** | 高等教育出版社 | **购书热线** | 010 – 58581118 |
| **社　　址** | 北京市西城区德外大街 4 号 | **免费咨询** | 800 – 810 – 0598 |
| **邮政编码** | 100120 | **网　　址** | http://www.hep.edu.cn |
| **总　　机** | 010 – 58581000 | | http://www.hep.com.cn |
| | | **网上订购** | http://www.landraco.com |
| **经　　销** | 蓝色畅想图书发行有限公司 | | http://www.landraco.com.cn |
| **印　　刷** | 北京明月印务有限责任公司 | **畅想教育** | http://www.widedu.com |
| **开　　本** | 787×1092 1/16 | **版　　次** | 2009 年 3 月第 1 版 |
| **印　　张** | 9.25 | **印　　次** | 2009 年 3 月第 1 次印刷 |
| **字　　数** | 200 000 | **定　　价** | 29.00 元 |

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

**版权所有　侵权必究**

**物料号　25766 – 00**

# 《俄罗斯数学教材选译》序

从上世纪 50 年代初起, 在当时全面学习苏联的大背景下, 国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材. 这些教材体系严密, 论证严谨, 有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础, 培养了一大批优秀的数学人才. 到了 60 年代, 国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材, 但还在很大程度上保留着苏联教材的影响, 同时, 一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用. 客观地说, 从解放初一直到文化大革命前夕, 苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用, 起了不可忽略的影响, 是功不可没的.

改革开放以来, 通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材, 大家眼界为之一新, 并得到了很大的启发和教益. 但在很长一段时间中, 尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革, 引进却基本中断, 更没有及时地进行跟踪, 能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少, 事实上已造成了很大的隔膜, 不能不说是一个很大的缺憾.

事情终于出现了一个转折的契机. 今年初, 在由中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上, 有数学家提出, 莫斯科大学为庆祝成立 250 周年计划推出一批优秀教材, 建议将其中的一些数学教材组织翻译出版. 这一建议在会上得到广泛支持, 并得到高等教育出版社的高度重视. 会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论, 大家一致认为: 在当前着力引进俄罗斯的数学教材, 有助于扩大视野, 开拓思路, 对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要.《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下, 经数学天元基金资助, 由高等教育出版社组织出版的.

经过认真选题并精心翻译校订, 本系列中所列入的教材, 以莫斯科大学的教材为主, 也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材. 有大学基础课程的教材, 也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书. 有些教材虽曾翻译出版, 但经多次修订重版, 面目已有较大变化, 至今仍广泛采用、深受欢迎, 反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力, 对我们也是一个有益的借鉴. 这一教材系列的出版, 将中俄数学教学之间中断多年的链条重新连接起来, 对推动我国数学课程设置和教学内容的改革, 对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才, 可望发挥积极的作用, 并起着深远的影响, 无疑值得庆贺, 特为之序.

李大潜

2005 年 10 月

献给莫斯科大学数学力学系微分方程教研室的各位教授

A. C. 卡拉什尼柯夫, C. H. 克鲁日科夫, E. M. 兰吉斯.

# 序　言

在本参考书中汇集了 1994 — 2003 年间, 国立莫斯科大学数学力学系学生偏微分方程与数学物理方程笔试的一些题目. 出版时, 减少了那些在现有教科书和参考书中可以找到的标准习题的数量. 此外, 对叙述上有某些近似的题目, 通常只列入其中之一. 本习题集中也未收入课程大纲中的理论问题 (定义、问题的提法、定理的叙述与证明), 这些题目必定会出现在任何试题中. 为使读者对这些考试有所认识, 在本习题集末尾列出了一些试卷, 并指出考试的条件及评分标准.

国立罗蒙诺索夫莫斯科大学数学力学系微分方程教研室的教师 Т. Д. 文特策尔 (Т. Д. Вентцель)、А. Ю. 高里茨基 (А. Ю. Горицкий)、А. С. 卡拉什尼柯夫 (А. С. Калашников)、В. А. 康德拉季耶夫 (В. А. Кондратьев)、С. Н. 克鲁日科夫 (С. Н. Кружков)、Е. М. 兰吉斯 (Е. М. Ландис)、Е. В. 拉德凯维奇 (Е. В. Радкевич)、Г. А. 切契金 (Г. А. Чечкин)、А. С. 沙玛耶夫 (А. С. Шамаев)、Т. А. 沙波什尼柯娃 (Т. А. Шапошникова) 参与了各种试题的编列. А. С. 卡拉什尼柯夫完成了对 1994—1998 年题目的选择和编定. 本书由 Т. Д. 文特策尔、А. Ю. 高里茨基、Т. О. 卡布斯金娜 (Т. О. Капустина)、О. С. 罗赞诺娃 (О. С. Розанова)、Г. А. 切契金定稿.

习题按专题分成五章. 每一章都列出该专题的基本内容. 个别习题给出了详细解答. 除去证明题以外的所有习题都给出了答案.

正如实践所证明的, 偏微分方程课在传统上对于数学专业学生来说是难于接受的. 我们能否破除这个传统?!

# 符号表

$\mathbb{N}$ —— 所有自然数的集合①.

$\mathbb{Z}$ —— 所有整数的集合.

$\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$ —— 所有非负整数的集合.

$\mathbb{R}$ —— 所有实数的集合.

$\mathbb{R}_+$ —— 所有正实数的集合.

$\mathbb{R}_-$ —— 所有负实数的集合.

$\mathbb{R}^n$ —— $n$ 维实线性空间.

$(x_1, \cdots, x_n)$ —— $\mathbb{R}^n$ 中的笛卡儿坐标.

$(\rho, \theta)$ —— $\mathbb{R}^2$ 中的极坐标.

$\Omega$ —— 如无相反的约定, 表示 $\mathbb{R}^n$ 中有界区域 (即连通开集).

$\partial\Omega$ —— 区域 $\Omega$ 的边界.

$\nu$ —— $\partial\Omega$ 的单位外法向量.

$B_a^n(x^0) = \{x \in \mathbb{R}^n \big| |x - x^0| < a\}$ —— 球心在 $x^0$ 点、半径为 $a$ 的 $n$ 维球.

$S_a^n(x^0) = \partial B_a^n(x^0) = \{x \in \mathbb{R}^n \big| |x - x^0| = a\}$ —— $\mathbb{R}^n$ 中的中心在 $x^0$、半径为 $a$ 的球面.

$Q_\Omega^T = \Omega \times (0, T] = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \big| x \in \Omega,\ 0 < t \leqslant T\}$ (区域 $\Omega$ 可能是无界的).

$Q_\Omega^\infty = \Omega \times \mathbb{R}_+ = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \big| x \in \Omega,\ 0 < t < +\infty\}$ (区域 $\Omega$ 可能是无界的).

$\Pi_T = \mathbb{R}^n \times (0, T] = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \big| x \in \mathbb{R}^n,\ 0 < t \leqslant T\}$.

$\Delta u = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \cdots + u_{x_nx_n}$ —— 拉普拉斯算子.

$L_p(\Omega)$ —— 区域 $\Omega$ 中 $p$ 幂可和函数的空间.

---

①按本书作者的理解, 自然数的集合中不包括零. —— 译者注

$L_\infty(\Omega)$ —— 区域 $\Omega$ 中有界可测函数的空间.

$L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$ —— 对 $\Omega$ 的任意有界子区域 $\Omega_1$ ($\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$) 为属于 $L_p(\Omega_1)$ 的函数的空间.

$L_{p,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ —— 对任意 $a>0$ 属于空间 $L_p(B_a^n(0))$ 的函数的空间.

$C^l(\Omega)$ —— 在区域 $\Omega$ 中 $l$ 次连续可微的函数的集合.

$C_b(\Omega) = C(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ —— 在区域 $\Omega$ 中有界、连续的函数的集合.

$C^\infty(\Omega)$ —— 在区域 $\Omega$ 中无穷次连续可微的函数的集合.

$\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ —— 在区域 $\Omega$ 中无穷次连续可微、在 $\partial\Omega$ 的邻域中为零的函数的集合.

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ —— $\mathbb{R}^n$ 中无穷次连续可微、具有紧支集的函数的空间.

$H^1(\Omega)$ —— 连同其在索伯列夫意义下一阶广义导数属于 $L_2(\Omega)$ 的函数的空间.

$\mathring{H}^1(\Omega)$ —— 按 $H^1(\Omega)$ 的范数, 集合 $C_0^\infty(\Omega)$ 的完备化.

$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ —— $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ 上线性连续泛函的空间.

$\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ —— “$\delta$ 函数”, 即由公式

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

定义的泛函.

$\delta_{x^0} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, 其中 $x^0 \in \mathbb{R}^n$ —— “位移 $\delta$ 函数”:

$$\langle \delta_{x^0}, \varphi \rangle = \varphi(x^0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

$\Theta(x)$ —— 赫维赛德 $\Theta$ 函数:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & 对\ x \geqslant 0, \\ 0, & 对\ x < 0. \end{cases}$$

$x_+ = \max\{x, 0\}$; $x_- = \max\{-x, 0\}$.

$\omega_n$ —— $\mathbb{R}^n$ 中单位球面 $S_1^n(0)$ 的面积.

$\nabla$ —— $\mathbb{R}^n$ 中的梯度算子, $\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right)$.

# 目 录

《俄罗斯数学教材选译》序

序言

符号表

引论 · · · · · 1

1. 泛函分析方面的补充知识 · · · · · 1
2. 偏微分方程理论的一般概念 · · · · · 1
3. 双曲型方程 · · · · · 2
4. 抛物型方程 · · · · · 2
5. 椭圆型方程 · · · · · 2

第 1 章 泛函分析方面的补充知识 · · · · · 4

1.1 广义函数与基本解 · · · · · 4
1.2 索伯列夫空间 · · · · · 6

第 2 章 偏微分方程理论的一般概念 · · · · · 9

2.1 方程的分类. 特征 · · · · · 9
2.2 问题提法的适定性 · · · · · 13

**第 3 章 双曲型方程** ······ **17**
3.1 波动方程的柯西问题 ······ 18
3.2 半有界弦的混合问题 ······ 22
3.3 有界弦. 傅里叶方法 ······ 25

**第 4 章 抛物型方程** ······ **29**
4.1 边值问题 ······ 29
4.2 柯西问题 ······ 34

**第 5 章 椭圆型方程** ······ **38**
5.1 调和函数 ······ 38
5.2 基本边值问题的古典提法 ······ 43
5.3 广义解 ······ 50

**第 6 章 个别习题的解答** ······ **54**

**答案** ······ **84**

**考试样题** ······ **89**

**参考文献** ······ **128**

**译者后记** ······ **131**

PDG

# 引　论

我们来指出某些定义和定理, 为了解本习题集中的习题, 这些定义和定理是必须知道的, 同时也指出一些教科书, 在这些书中可以找到这些内容. 以下各点中所引习题的号码, 是作为例子引入的, 可能并未包含该论题中所有的习题.

## 1. 泛函分析方面的补充知识

**1.** 广义函数的定义, 广义函数的运算以及微分算子的基本解. [5, II 章, §§5~7] (习题 1.1~1.5, 2.17b))

**2.** 空间 $H^1$ 及 $\mathring{H}^1$ 的定义. [20, III 章, §5] (习题 1.8~1.16, 1.19~1.21)

**3.** 弗里德里希斯 (Friedrichs) 不等式. [20], [22] (习题 1.17~1.19)

## 2. 偏微分方程理论的一般概念

**1.** 二阶线性方程的分类及将其化为标准形式. [23, I 章, §6] (习题 **2.1~2.4**, **2.7~2.9**, **2.14**, **2.15**, **2.17** a))

**2.** 特征的定义. [23, I 章, §3] (习题 **2.5~2.7**, **2.11~2.13**, **3.3**, **3.4**)

**3.** 关于柯西问题解析解的存在性和唯一性的柯西 – 柯瓦列夫斯卡娅定理 [23, I 章, §§10,11] (习题 **2.16**, **2.22** a))

**4.** 偏微分方程问题提法的适定性 [23, I 章, §8] (习题 **2.17~2.23**)

## 3. 双曲型方程

**1.** 一维振动方程柯西问题的提法. 达朗贝尔公式. 依赖区域. [23, II 章, §§11~13] (习题 **3.1~3.2**, **3.5~3.12**)

**2.** 在空间维数为 2 维与 3 维情形下波动方程的柯西问题. 泊松公式与基尔霍夫公式. 在初始条件中对称性的应用. 依赖区域. [23, II 章, §§12,13], [22, §5.1] (习题 **3.13~3.23**)

**3.** 半有界弦的边值问题. 初值与边值的相容性条件. 初值问题的延拓方法及化边值问题为柯西问题. [29, II 章, §§2,4] (习题 **3.24~3.28**, **3.31**, **3.32**)

**4.** 基本边值问题的提法. 边值问题解的能量恒等式. [23, II 章, §18] (习题 **3.33~3.36**)

**5.** 用傅里叶方法解边值问题. 边值问题解的周期性. [23, III 章, §20], [29, II 章, §3] (习题 **3.37~3.40**)

## 4. 抛物型方程

**1.** 柯西问题与基本边值问题的提法. [23, IV 章, §§38, 40] [22, §4.3]

**2.** 柱体中的极值原理. 第一边值问题解的唯一性. [23, IV 章, §38], [22, §4.4] (习题 **4.1**, **4.3**, **4.6**, **4.7**, **4.20**, **4.21**)

**3.** 用傅里叶方法解边值问题. [23, IV 章, §39] (习题 **4.8~4.19**)

**4.** 带形区域中的极值原理. [23, IV 章, §40], [22, §4.4] (习题 **4.27**, **4.31**)

**5.** 关于柯西问题解的定常化的定理. [22, §4.5] (习题 **4.33~4.36**)

## 5. 椭圆型方程

**1.** 调和函数的定义. 平均值定理. 刘维尔定理. [23, III 章, §30] [22, §§3.5, 3.9] (习题 **5.1**, **5.2**, **5.3**, **5.6**, **5.7**, **5.15**, **5.42**)

**2.** 极值原理. 关于法向导数的定理. [23, III 章, §8] [22, §3.5] (习题 **5.9**, **5.10**, **5.11**, **5.12**, **5.13**, **5.28**, **5.33**, **5.18**)

**3.** 格林公式. 关于流量的定理. [23, III 章, §§30, 33], [22, §§3.3, 3.5] (习题 **5.29**, **5.30**, **5.31**, **5.32**, **5.43**)

**4.** 关于可去奇点的定理. [23, III 章, §30], [22, §3.10] (习题 **5.16**, **5.17**, **5.34**, **5.35**)

**5.** 位势理论. [23, III 章, §34], [22, §3.12] (习题 **5.36**, **5.37**)

**6.** 广义函数意义下的广义导数及在索伯列夫意义下的广义导数. 狄利克雷问题的广义解. 解狄利克雷问题的变分方法. [22, §1.13], [20, IV 章, §1] (习题 **5.48**, **5.49**,

**5.50, 5.52, 5.51)**

为了研读偏微分方程教程及解本习题集中所提的习题，作为基本文献，推荐使用 [5], [20], [22], [23] 及 [29]. 对于希望得到这方面更全面信息者，书末列出了更多的文献.

# 第 1 章　泛函分析方面的补充知识

## 1.1　广义函数与基本解

空间 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (或 $\mathcal{D}'(\Omega)$) 的元素即在 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$(相应地在 $\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$) 上的连续线性泛函, 称为**广义函数**. 泛函 $f \in \mathcal{D}'$ 在 $\varphi \in \mathcal{D}$ 上的作用表示为 $f(\varphi)$ 或 $(f, \varphi)$.

在广义函数空间中分出了**正则**广义函数, 即通常的函数 $f(x) \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$(或 $f(x) \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$), 它的作用定义为

$$(f, \varphi) = \int f(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

(积分相应地是对空间 $\mathbb{R}^n$ 或区域 $\Omega$ 进行的). 非正则的广义函数称为**奇异**广义函数. $\delta$ 函数是奇导广义函数的例子.

由等式

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi\right) = -\left(f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

定义的广义函数称为广义函数 $f \in \mathcal{D}'$ 对变量 $x_i$ 的**导数**. 依照归纳法可定义广义函数的任意阶广义导数.

使得 $\mathcal{L}(\mathcal{E}) = \delta$ 成立的, 即使 $(\mathcal{L}(\mathcal{E}), \varphi) = \varphi(0)$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}$ 成立的函数 $\mathcal{E}$ (一般地说, 它可能是广义函数) 称为微分算子 $\mathcal{L}$ 的**基本解**.

我们来举出某些微分算子的基本解的例子.

$n$ 维空间中拉普拉斯算子 $\mathcal{L}=\Delta$ 的基本解具有如下形状:

$$\mathcal{E}_n(x)=\frac{1}{\omega_n(2-n)|x|^{n-2}},\quad n\geqslant 3,$$
$$\mathcal{E}_2(x)=\frac{1}{2\pi}\ln|x|,\quad n=2.$$

对于热传导算子 $\mathcal{L}=\dfrac{\partial}{\partial t}-a^2\Delta$, 函数

$$\mathcal{E}(x,t)=\frac{\Theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n}e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}$$

是其基本解.

波动算子 $\mathcal{L}=\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\Delta$ 依其空间变量 $x$ 的维数 $n, n=1,2,3$, 有如下的基本解:

$$\mathcal{E}_1(x,t)=\frac{1}{2a}\Theta(at-|x|),\quad n=1,$$
$$\mathcal{E}_2(x,t)=\frac{\Theta(at-|x|)}{2\pi a\sqrt{a^2t^2-|x|^2}},\quad n=2,$$
$$\mathcal{E}_3(x,t)=\frac{1}{4\pi a^2t}\delta(|x|-at),\quad n=3.$$

与一维和二维空间变量的情形不同, $\mathcal{E}_3$ 乃是奇异广义函数, 它在基本函数上的作用由下式定义:

$$(\mathcal{E}_3,\varphi)=\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{4\pi a^2t}\left(\int_{|x|=at}\varphi(x,t)dS_x\right)dt,\quad \forall\varphi(x,t)\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^4).$$

其中 $dS_x$ 是球面 $S^3_{at}(0)$ 上的面积元素.

## 习题

**1.1** 设 $u(x,y)$ 是正方形 $(-1,1)\times(-1,1)$ 的特征函数. 在广义函数理论的意义下求 $\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}$.

**1.2** 对哪些参数值 $a\in\mathbb{R}^1$, 函数

$$u(x,t)=\begin{cases}1, & 当\ t\leqslant ax,\\ 0, & 当\ t>ax,\end{cases}\quad (x,t)\in\mathbb{R}^2$$

在广义函数理论的意义下是方程 $u_t=u_x$ 的解?

**1.3** 设函数 $y(x)\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, 并且作为广义函数满足方程 $y'=y$. 证明, $y(x)$ 是正则广义函数 $Ce^x$, 其中 $C$ 为常数.

**1.4** 求算子

$$\mathcal{L}u(x) = \frac{d^2u(x)}{dx^2} + \frac{du(x)}{dx}$$

的所有基本解.

**1.5** 求算子

$$\mathcal{L}u(x,y) = u_{xx}(x,y) - u_{yy}(x,y)$$

当 $y < 0$ 时变为零的基本解.

**1.6** 证明函数

$$E(x,x_0) = -\frac{\cos(\sqrt{c}r)}{4\pi r}, \quad r = |x - x_0|$$

是算子

$$\Delta + c, \quad \text{其中 } c \text{ 为正常数}, \quad n = 3,$$

的基本解.

## 1.2 索伯列夫空间

满足积分恒等式

$$\int\limits_{\Omega} v(x)\varphi(x)dx = -\int\limits_{\Omega} u(x)\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i}dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

的函数 $v(x)$ (表示为: $v(x) = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$) 称为函数 $u(x)$ 在区域 $\Omega$ 内在索伯列夫意义下对变量 $x_i$ 的**广义导数**.

函数 $u(x)$ 连同其所有的在索伯列夫意义下的一阶广义导数 $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = 1, \cdots, n$, 都属于空间 $L_2(\Omega)$ 时, 函数 $u(x)$ 的空间称为**索伯列夫空间** $H^1(\Omega)$.

空间 $H^1(\Omega)$ 是巴拿赫空间 (即完备的赋范空间). 其范数定义如下:

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{(L_2(\Omega))^n} = \int\limits_{\Omega} \left( |u|^2 + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \right) dx.$$

空间 $H^1(\Omega)$ 中子空间 $C_0^\infty(\Omega)$ 的闭包称为**索伯列夫空间** $\mathring{H}^1(\Omega)$.

**弗里德里希斯 (Friedrichs) 不等式**. 对于任何有界区域 $\Omega$, 存在常数 $C(\Omega)$, 使得

$$\int\limits_{\Omega} |u|^2 dx \leqslant C(\Omega) \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx, \quad \forall u \in \mathring{H}^1(\Omega).$$

根据弗里德里希斯不等式, $\mathring{H}^1(\Omega)$ 中如下的泛函

$$\|u\|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)} = \|\nabla u\|^2_{(L_2(\Omega))^n} = \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx \tag{1.1}$$

给出了与空间 $H^1(\Omega)$ 原来的范数等价的范数.

空间 $\mathring{H}^1(\Omega)$ 是关于内积

$$[u,v]=(\nabla u,\nabla v)_{(L_2(\Omega))^n}=\int_\Omega\sum_{i=1}^n\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx$$

的希尔伯特空间. 空间 $H^1(\Omega)$ 也是具有内积

$$(u,v)_{H^1(\Omega)}=(u,v)+[u,v]$$

的希尔伯特空间, 其中 $(u,v)=\int\limits_\Omega u(x)v(x)dx$ 是 $L_2(\Omega)$ 中的标准内积.

## 习题

**1.7** 设 $f(x)\in H^1(\Omega), a(x)\in C^\infty(\Omega)$. 证明: 函数 $f(x)a(x)$ 在索伯列夫意义下是可微的, 对于求其一阶导数, 通常的莱布尼茨公式成立. 当 $f(x)a(x)\in H^1(\Omega)$, 是否正确?

**1.8** 设 $f\in H^1(B_1^n(0))$. $f\notin L_\infty(B_1^n(0))$ 是否可能?

a) 当 $n=3$; b) 当 $n=2$; c) 当 $n=1$?

**1.9** 设 $u(x)$ 是在 $B_1^3(0)$ 中有界的函数, 且在 $B_1^3(0)\backslash\{0\}$ 中光滑. 是否可以断言 $u\in H^1(B_1^3(0))$?

**1.10** a) 证明 $\mathring{H}^1((0,1))$ 中的任何函数都是连续的.

b) 是否任何在闭区间 $[0,1]$ 上连续且 $u(0)=u(1)=0$ 的函数 $u(x)$ 都属于 $\mathring{H}^1((0,1))$?

**1.11** 设 $u\in C(\overline{\Omega})\cap H^1(\Omega)$ 且当 $x\in\partial\Omega$ 时 $u(x)=0$. 证明 $u\in\mathring{H}^1(\Omega)$.

**1.12** 对哪些 $\alpha$, 函数 $u(x,y)=|\ln(x^2+y^2)|^\alpha$ 属于空间 $H^1(\Omega)$, 如果

a) $\Omega=B_{1/2}^2(0)$;

b) $\Omega=B_2^2(0)\Big\backslash\overline{B_{1/2}^2(0)}$?

**1.13** 对哪些 $\alpha$. 函数 $u(x,y)=\left|\ln(x^2+xy+2y^2)\right|^\alpha$ 属于 $H^1(\Omega)$? 其中 $\Omega=\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)\times\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$.

**1.14** a) 对哪些 $\alpha$ 与 $n$, 函数 $f(x)=\big|\ln|x|\big|^\alpha/|x|^2$ 属于空间 $H^1(B_{1/2}^n(0))$?

b) 对空间 $H^1(B_1^n(0))$ 回答同样的问题.

**1.15** 对哪些 $\alpha,\beta$, 函数 $f(x)=|x|^\alpha\cos\beta x$ 属于空间 $\mathring{H}^1((-1,1))$?

**1.16** 对怎样的 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, 函数 $f(x)=\big|\ln|x|\big|^\alpha\cos(\beta|x|)$ 属于空间 $\mathring{H}^1(B_{1/2}^n(0))$? 其中 $x=(x_1,\cdots,x_n)$.

**1.17** 设

$$D=\{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n\big|x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2<ax_n^2,\ 0<x_n<+\infty\}.$$

证明: 对任意常数 $C > 0$ 存在这样的有界区域 $\Omega \subset D$ 及这样的函数 $f \in \mathring{H}^1(\Omega)$ 使得

$$\int_\Omega f^2(x)dx > C\int_\Omega |\nabla f(x)|^2 dx.$$

**1.18** 弗里德里希斯不等式在带形

$$\Pi = \{(x,y)|0 < x < 1,\ -\infty < y < +\infty\} \subset \mathbb{R}^2$$

是否成立?

**1.19** 设 $Q = B_1^3(0)$. 如下断言是否成立: 存在常数 $C > 0$ 使得

$$|u(0)| \leqslant C\|u\|_{H^1(Q)}, \quad \forall u(x) \in C^\infty(\overline{Q})?$$

**1.20** 在空间 $\mathring{H}^1((-1,1))$ 中考虑光滑的、具有紧支集的函数 $\varphi(x)$ 的集合 $A$, 它满足条件 $\varphi'(0) + \alpha\varphi(0) = 0, \alpha \in \mathbb{R}$. 求 $\mathring{H}^1((-1,1))$ 中集合 $A$ 的闭包 $\bar{A}$ 的余维数.

**1.21** 在平面 $\mathbb{R}^2$ 上构造有界区域 $\Omega$ 的例子使得 $C^\infty(\overline{\Omega})$ 的函数在空间 $H^1(\Omega)$ 中不构成处处稠密的集合, 即 $\overline{C^\infty(\overline{\Omega})} \neq H^1(\Omega)$.

# 第 2 章　偏微分方程理论的一般概念

## 2.1　方程的分类. 特征

二阶线性方程具有如下形状:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} + au = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ a_{ij} = a_{ji}. \tag{2.1}$$

对于向量 $\gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_n)$ 如果有

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \gamma_i \gamma_j = 0,$$

则说向量 $\gamma$ 具有**特征**方向.

曲面 $\Phi(x) = 0$ 被称为方程 (2.1) 的**特征**, 是指如果这个曲面在它的每一点的法向 $\nu = \nabla \Phi$ 都是特征方向, 即

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = 0.$$

如果矩阵 $(a_{ij})$ 可化为对角矩阵, 那么相应于对角线上元素的符号, 上述方程可分成椭圆型 (当所有对角元素非零、符号相同), 双曲型 (当所有对角元素非零且刚好有一个元素与其余元素异号), 抛物型 (当对角元素刚好有一个为零, 而其余元素同号). 其余的类型我们没有命名.

对于两个自变量的二阶方程

$$a_{11} u_{xx} + 2a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} + b_1 u_x + b_2 u_y + cu = g(x, y),$$

由所谓的**特征方程**

$$a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}(dx)^2 = 0$$

求出的曲线是其**特征**. 如果 $a_{11} \neq 0$, 那么可求出形如 $y = y(x)$ 的解, 其中

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{D}}{a_{11}}, \quad D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} \text{ 是判别式.}$$

根据判别式的符号, 出现三种情况.

**双曲情形**: $D > 0$, 两族特征线 $\xi(x,y) = C$ 及 $\eta(x,y) = C$. 经代换

$$\begin{cases} \xi = \xi(x,y), \\ \eta = \eta(x,y), \end{cases}$$

方程可化归**第二种标准形式**

$$u_{\xi\eta} + \text{低阶项} = 0.$$

在代换

$$\begin{cases} \alpha = \xi + \eta, \\ \beta = \xi - \eta \end{cases}$$

的情形下, 方程可化归**第一种标准形式**

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} + \text{低阶项} = 0.$$

**抛物情形**: $D = 0$, 一族特征线 $\xi(x,y) = C$. 任何形如

$$\begin{cases} \xi = \xi(x,y), \\ \eta = \eta(x,y) \end{cases}$$

的非退化代换, 其中 $\eta(x,y)$ 是某个二元函数, 可使方程化归标准形式

$$u_{\eta\eta} + \text{低阶项} = 0.$$

**椭圆情形**: $D < 0$, 没有实特征, 但是有两族复共轭的特征线 $\xi(x,y) \pm i\eta(x,y) = C$. 为了化为标准形式 (仅有第一种) 必须作代换

$$\begin{cases} \xi = \xi(x,y), \\ \eta = \eta(x,y). \end{cases}$$

在这种情形下方程化归如下形式

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \text{低阶项} = 0.$$

## 习题

**2.1** 是否存在形如

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1,\cdots,x_n)u_{x_ix_j}=0,\quad a_{ij}\in C(\mathbb{R}^n),$$

的方程, 它在非空集合 $D\subset\mathbb{R}^n(D\neq\mathbb{R}^n)$ 上是椭圆型的, 而在 $D$ 的余集 $\mathbb{R}^n\setminus D$ 上是双曲型的?

**2.2** 如下断言是否正确: 如果方程

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1,\cdots,x_n)u_{x_ix_j}=0,\quad a_{ij}\in C(\mathbb{R}^n),$$

在一点 $(x_1,\cdots,x_n)$ 是双曲型的 (椭圆型的, 抛物型的), 那么它在这点的某个邻域也是双曲型的 (椭圆型的, 抛物型的)?

**2.3** 平面上的三个方程

$$u_t=u_{xx},\quad u_{tt}=u_{xx},\quad u_{tt}=-u_{xx}$$

中哪些存在具有有界、闭的等位线的非常数解?

**2.4** 对于哪些 $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, 方程

$$u_{xy}+(3x+y-z)u_{xz}+(3x-y+z)u_{yz}=0$$

是双曲型的?

**2.5** 求方程 $u_{xx}-y^2u_{yy}=0$ 过下述各点的特征:

a) 点 $(1,2)$;

b) 点 $(1,0)$.

**2.6** a) 求方程

$$u_{xy}-u_{yy}-u_x+u_y=0$$

的所有特征.

b) 求上述方程的通解.

**2.7** a) 确定方程 $2u_{xx}+u_{xy}=1$ 的类型.

b) 求该方程的特征.

c) 求其通解.

**2.8** a) 依据于实参数 $\alpha$, 确定如下方程的类型:

$$u_{xx}-2\alpha u_{xy}-3\alpha^2u_{yy}+\alpha u_y+u_x=0. \tag{2.2}$$

b) 化方程 (2.2) 为标准形式.

c) 求这个方程的通解.

**2.9** a) 求出所有这样的 $\alpha$, 对它存在线性变量变换 $(x,y)\to(t,z)$ 使得方程

$$u_{xx}+4u_{xy}-\alpha u_{yy}=0 \tag{2.3}$$

i) 变为弦振动方程 $u_{tt}=u_{zz}$;

ii) 变为热传导方程 $u_t=u_{zz}$.

b) 对方程

$$u_{xx}+4u_{xy}-\alpha u_{yy}-\alpha u_x+\alpha^2 u_y=0$$

讨论同样的问题.

c) 设函数 $u(x,y)\in C^2(B_1^2(0))$ 对某个 $\alpha<-10$ 满足方程 (2.3). 是否可能同时 $u\notin C^\infty(B_1^2(0))$?

d) 对 $\alpha>10$ 讨论同样的问题.

**2.10** 设 $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\big|x^2+(y-2l)^2<l^2\}$, 函数 $u\in C^2(\Omega)$ 在区域 $\Omega$ 内满足方程

$$2u_{xx}+\frac{\operatorname{sign}y}{2}u_{yy}=0.$$

a) 在 $l>0$ 的情形是否可能 $u\notin C^3(\Omega)$? 回答说明理由.

b) 在 $l<0$ 的情形讨论同样的问题.

**2.11** 在平面 $(t,x)\in\mathbb{R}^2$ 上考虑方程

$$u_t-u_x=0, \tag{2.4}$$

$$2u_{tt}-(\alpha+1)^2u_{tx}+2\alpha u_{xx}=0. \tag{2.5}$$

a) 求方程 (2.4) 的特征.

b) 对于哪些 $\alpha$, 方程 (2.4) 的任何无穷次可微的解 $u(t,x)$ 也是方程 (2.5) 的解?

对于 b) 小题中求出的参数 $\alpha$ 的每一个值:

c) 求方程 (2.5) 的特征.

d) 指出方程 (2.5) 的某个解 $u(t,x)$, 但它不是方程 (2.4) 的解, 或者证明这样的解不存在.

e) 对有界解讨论与 d) 同样的问题.

**2.12** 求方程

$$u_{tt}=u_{xx}+u_{yy}$$

过直线 $t=0, y=x$ 的特征平面.

**2.13** 对每个 $\alpha\in\mathbb{R}$, 求方程

$$u_{xx}+2u_{yy}+2\alpha u_{yz}+\alpha^2u_{zz}+u_z+u=1$$

的所有特征.

**2.14** 求方程

$$u_{xx}+2u_{xy}+2u_{xz}+u_{yy}+2u_{yz}+u_{zz}-u=0$$

的通解.

**2.15** a) 把方程

$$u_{xx}+u_{xy}-2u_{yy}+3(x+y)u_x+6(x+y)u_y+9u=0$$

化为不含非混合二阶导数的形状.

b) 求原来方程的通解.

**2.16** 对哪些实数 $\alpha$ 与 $\beta$, 关于非特征的广义柯西问题解析解的存在与唯一性定理可应用于如下问题:

$$u_{xy}+3u_{yy}+u=xy,\quad u\big|_S=u_x\big|_S=u_y\big|_S=0?$$

其中 $S$ 由方程 $\alpha x+\beta y=1$ 给出.

**2.17** a) 求出所有这样的 $\alpha$ 的值: 对于它存在属于 $C^1(\mathbb{R}^2)\cap C^2(\{x\geqslant 0\})\cap C^2(\{x\leqslant 0\})$, 满足方程

$$\alpha u_{xx}+u_{xy}+u_{yy}=0,\quad 当\ x\neq 0,$$

及条件

$$u\big|_{x=0}=1,\quad u_x\big|_{x=0}=0,$$

但对任何 $y_0\in\mathbb{R}$ 且 $a>0$ 都不属于 $C^2(B_a^2(0,y_0))$ 的函数 $u(x,y)$.

b) 求出所有这样的 $\alpha$, 对它, 对任意 $f\in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, 函数 $u(x,y)=f(x+y)$ 在 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ 中满足 a) 小题中的方程.

## 2.2 问题提法的适定性

**适定性的定义** 设给定方程 $Lu=f$ 及附加条件 $B_ju=g_j$. $E_0$ 和 $E_1$ 是线性赋范空间偶. 如果

1) 对所有给定的组 $(f,g_j)\in E_1$, 存在解 $u\in E_0$;

2) 这个解是唯一的;

3) 存在这样的常数 $K$, 它不依赖于 $(f,g_j)$, 使得

$$\|u\|_{E_0}\leqslant K\|(f,g_j)\|_{E_1},$$

那么这个问题在这一线性赋范空间偶内的提法是*适定的*. 我们着重指出: $E_0,E_1$ 不一定是巴拿赫空间, 即不一定完备.

## 习题

**2.18**　考虑问题

$$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xx}, (x,t) \in \overline{\Omega} := \{(x,t)|0 \leqslant t \leqslant 2x,\ 0 \leqslant x < +\infty\}; \\ &u\big|_{t=0} = 0, \quad u\big|_{t=2x} = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x < +\infty \\ &\varphi \in C^2(\overline{\mathbb{R}}_+) \cap L_\infty(\overline{\mathbb{R}}_+), \quad \varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

在下述空间偶 $(E_0, E_1)$ 中, 这个问题是否适定? 其中

$$E_0 = C^2(\overline{\Omega}) \cap L_\infty(\overline{\Omega}), \quad \|u\|_{E_0} = \sup_{\overline{\Omega}} |u(x,t)|,$$
$$E_1 = \{\varphi(x)|\varphi \text{ 满足 } (2.6)\}, \quad \|\varphi\|_{E_1} = \sup_{\overline{\mathbb{R}}_+} |\varphi(x)|.$$

**2.19**　边值问题

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx}, \quad (x,t) \in Q := (0,1) \times (0,2]; \\ &u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ &u\big|_{x=0} = u\big|_{x=1} = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2. \end{aligned}$$

在下述空间偶 $(E_0, E_1)$ 中是否适定? 其中

$$E_0 = \{u(x,t)\big|u \in C^{2,1}_{x,t}(Q) \cap C(\overline{Q})\}, \quad \|u\|_{E_0} = \max_{\overline{Q}} |u(x,t)|,$$
$$E_1 = \{\varphi(x)|\varphi \in C^1([0,1]), \quad \varphi(0) = \varphi(1) = 0\}, \quad \|\varphi\|_{E_1} = \max_{[0,1]} |\varphi(x)|.$$

**2.20**　在带形 $\overline{Q} := \overline{Q^T_{\mathbb{R}}}(0 < T < +\infty)$ 中的方程

$$u_{tt} = u_{xx}$$

具有条件

$$u\big|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad u_t\big|_{t=0} = \varphi_2(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

的柯西问题, 在下述空间偶 $(E_0, E_1)$ 中是否适定? 其中

$$E_0 = \{u(x,t)\big|u \in C^2(\overline{Q}), \sup_{\overline{Q}} |u(x,t)| < +\infty\}, \ \|u\|_{E_0} = \sup_{\overline{Q}} |u(x,t)|,$$
$$E_1 = \{\Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))\big|\varphi_1 \in C^2(\mathbb{R}), \varphi_2 \in C^1(\mathbb{R}),\ \sup_{\mathbb{R}} |\varphi_j(x)| < +\infty\ (j = 1,2)\},$$

**2.21**　在带形 $Q := Q^T_{\mathbb{R}}(0 < T < +\infty)$ 中方程 $u_t = -u_{xx}$ 具有条件 $u\big|_{t=0} =$

$\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$ 的柯西问题在下述空间偶 $(E_0, E_1)$ 中是否适定? 其中

$$E_0 = \{(x,t)\big|u \in C^{2,1}_{x,t}(Q) \cap C(\overline{Q}) \cap L_\infty(\overline{Q})\},$$
$$E_1 = \left\{\varphi(x)\left|\frac{d^j\varphi}{dx^j} \in C(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})\ (j = 0, 1, \cdots, p)\right.\right\},$$
$$\|u\|_{E_0} = \sup_{\overline{Q}} |u(x,t)|, \quad \|\varphi\|_{E_1} = \sum_{j=0}^{p} \sup_{\mathbb{R}} \left|\frac{d^j\varphi(x)}{dx^j}\right|,$$

$p \in \mathbb{N}$ 是固定的.

**2.22** 考虑对于方程

$$u_{tt} = u_x$$

具有条件

$$u\big|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad u_t\big|_{t=0} = \varphi_2(x)$$

的柯西问题.

a) 在 $\varphi_1$ 与 $\varphi_2$ 解析的情况下, 是否可对上述问题应用柯西 — 柯瓦列夫斯卡娅定理?

b) 这个问题在如下空间偶 $(E_0, E_1)$ 中是否适定? 其中

$$E_0 = \{(x,t)\big|u \in C^{1,2}_{x,t}(\overline{Q}) \cap L_\infty(\overline{Q})\}, \quad Q := Q^1_{\mathbb{R}},$$
$$E_1 = \left\{\Phi = (\varphi_1, \varphi_2)\left|\frac{d^j\varphi_i}{dx^j} \in C(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})\ (i = 1, 2; j = 0, 1, 2)\right.\right\},$$
$$\|u\|_{E_0} = \sup_{\overline{Q}} |u(x,t)|, \quad \|\Phi\|_{E_1} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=0}^{2} \sup_{\mathbb{R}} \left|\frac{d^j\varphi_i(x)}{dx^j}\right|.$$

**2.23** 考虑边值问题

$$u_t + \alpha u_x = 0, \quad (x,t) \in \overline{Q} := \overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+;$$
$$u\big|_{t=0} = g_1(x),\ x \in \overline{\mathbb{R}}_+, \quad u\big|_{x=0} = g_2(t),\ t \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

求在如下空间偶 $(E_0, E_1)$ 中使上述边值问题适定的所有 $\alpha$, 其中

$$E_0 = C^1(\overline{Q}) \cap L_\infty(\overline{Q}), \quad \|u\|_{E_0} = \sup_{\overline{Q}} |u(x,t)|,$$
$$E_1 = \{\Phi = (0, g_1, g_2)\big|g_j \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+) \cap L_\infty(\overline{\mathbb{R}}_+)\ (j = 1, 2),$$
$$g_1(0) = g_2(0), g_2'(0) + \alpha g_1'(0) = 0\}$$
$$\|\Phi\|_{E_1} = \sup_{\overline{\mathbb{R}}_+} |g_1(x)| + \sup_{\overline{\mathbb{R}}_+} |g_2(t)|.$$

**2.24** 考虑在 $\mathbb{R}^2_{x,y}$ 中的带形 $\Pi = \mathbb{R}^1_x \times [0, y_0]$ 中的柯西问题

$$\Delta u + u = 0 \quad \text{在 } \Pi \text{ 中}, \quad u \in C^2(\Pi) \cap C^1(\overline{\Pi}),$$
$$u\big|_{y=0} = \varphi(x), \quad u_y\big|_{y=0} = \psi(x),$$

其中 $\varphi(x), \psi(x)$ 是 $\mathbb{R}^1_x$ 中的有界连续函数. 这个问题在空间偶 $u \in E_0, \Phi \equiv (\varphi, \psi) \in E_1$ 中是否适定? 其中

$$E_0 = C(\Pi), \quad \|u\|_{E_0} = \sup_{\overline{\Pi}} |u(x,y)|,$$
$$E_1 = C(\mathbb{R}^1_x) \times C(\mathbb{R}^1_x), \quad \|\Phi\|_{E_1} = \sup_{\mathbb{R}} |\varphi(x)| + \sup_{\mathbb{R}} |\psi(x)|.$$

# 第 3 章　双曲型方程

如果二元函数 $u$ 的双曲型方程可以化为

$$u_{\xi\eta} = 0$$

的形式, 那么它的通解形如

$$u = f(\xi) + g(\eta).$$

## 习题

**3.1**　是否存在在 $\overline{B_1^2(0)}\setminus\{0\}$ 中满足方程 $u_{x_1x_1} = u_{x_2x_2}$ 且在 $\overline{B_1^2(0)}\setminus\{0\}$ 中无界的函数 $u \in C^2(\overline{B_1^2(0)}\setminus\{0\})$?

**3.2**　设函数 $u(x) \in C^2(\mathbb{R}^2)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中满足方程 $u_{x_1x_1} = u_{x_2x_2}$, 且对所有 $x \in \overline{B_1^2(0)}$ 有 $u(x) = 0$. 在 $\mathbb{R}^2$ 中求必使 $u(x) = 0$ 的最大集合.

**3.3**　考虑平面 $(x,t)$ 上的具有给定特征 $\{t = x\}$ 的波动方程柯西问题

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u\big|_{t=x} = \varphi(x), \quad u_x\big|_{t=x} = \psi(x).$$

想出这样的光滑函数 $\varphi(x), \psi(x)$, 使得所给问题无解.

**3.4**　举出这样的函数 $\varphi, \psi \in C^2(\mathbb{R})$ 的例子: 它们使得柯西问题

$$u_{xx} + 5u_{xy} - 6u_{yy} = 0, \quad u\big|_{y=6x} = \varphi(x), \quad u_y\big|_{y=6x} = \psi(x)$$

a) 有解. 这解是否唯一?

b) 无解.

**3.5** 设 $\overline{Q}=[0,1]\times[0,1], f\in C^2(\partial Q)$. 问题

$$u_{tt}=u_{xx},\quad (x,t)\in\overline{Q};\quad u\big|_{\partial Q}=f$$

的解 $u(x,t)\in C^2(\overline{Q})$ 是否唯一?

## 3.1 波动方程的柯西问题

对于波动方程

$$\begin{aligned}u_{tt}=a^2\Delta_x u+f(x,t)\quad (a>0),\quad x\in\mathbb{R}^n,\ t>0,\\ u\big|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t\big|_{t=0}=\psi(x),\end{aligned}$$

其中 $\varphi(x),\psi(x),f(x,t)$ 是给定的函数, 函数 $u(x,t)\in C^2(x\in\mathbb{R}^n,t>0)\cap C^1(x\in\mathbb{R}^n,t\geqslant 0)$ 称为柯西问题的古典解.

如果成立条件

$$\begin{aligned}\varphi(x)\in C^2(\mathbb{R}^1),\psi(x)\in C^1(\mathbb{R}^1),f(x,t)\in C^1(\mathbb{R}^1\times\overline{\mathbb{R}}_+)\quad (n=1);\\ \varphi(x)\in C^3(\mathbb{R}^n),\psi(x)\in C^2(\mathbb{R}^n),f(x,t)\in C^2(\mathbb{R}^n\times\overline{\mathbb{R}}_+)\quad (n=2,3),\end{aligned}$$

那么柯西问题的解存在、唯一, 并且在 $n=1$ 时由达朗贝尔公式给出:

$$\begin{aligned}u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi\\ +\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi d\tau;\end{aligned}$$

当 $n=2$ 时由泊松公式给出:

$$\begin{aligned}u(x,t)=&\frac{1}{2\pi a}\int_{|\xi-x|<at}\frac{\psi(\xi)d\xi}{\sqrt{(at)^2-|\xi-x|^2}}\\ &+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2\pi a}\int_{|\xi-x|<at}\frac{\varphi(\xi)d\xi}{\sqrt{(at)^2-|\xi-x|^2}}\right]\\ &+\frac{1}{2\pi a}\int_0^t\int_{|\xi-x|<a(t-\tau)}\frac{f(\xi,\tau)d\xi d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-|\xi-x|^2}};\end{aligned}$$

当 $n=3$ 时由基尔霍夫 (Kirchhoff) 公式给出:

$$u(x,t)=\frac{1}{4\pi a^2 t}\int\limits_{|\xi-x|=at}\psi(\xi)dS_\xi+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi a^2 t}\int\limits_{|\xi-x|=at}\varphi(\xi)dS_\xi\right]+$$
$$+\int_0^t\frac{1}{4\pi a^2(t-\tau)}\int\limits_{|\xi-x|=a(t-\tau)}f(\xi,\tau)dS_\xi d\tau.$$

**附注** 齐次波动方程在任意点 $(x,t)$ 的解依赖于初始函数 $\varphi$ 与 $\psi$ 在下述集合上的值:

当 $n=1$ 依赖于闭区间 $[x-at,x+at]$ 上的值;

当 $n=2$ 依赖于中心在点 $x$、半径为 $at$ 的圆内的值;

当 $n=3$ 依赖于中心在点 $x$、半径为 $at$ 的球面上的值. 并且不依赖于初始函数在上述集合之外的值.

## 习题

**3.6** 设 $u(x,t),(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, 是柯西问题

$$u_{tt}=u_{xx},\quad u\big|_{t=0}=0,\quad u_t\big|_{t=0}=(1+x^2)^\alpha e^{\beta x^2}.$$

的解. 求所有这样的 $\alpha,\beta$ : 它们使得 $\sup\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+}|u(x,t)|<+\infty$.

**3.7** 设 $u(x,t),(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, 是柯西问题

$$u_{tt}=u_{xx},\quad u\big|_{t=0}=0,\quad u_t\big|_{t=0}=(x^3+\alpha^2x^4)(1+x^2)^\beta.$$

的解. 求所有这样的 $\alpha,\beta$ : 它们使得 $\lim\limits_{t\to+\infty}u(0,t)$ 存在且有限.

**3.8** 求所有这样的复数 $a$, 使得在半平面 $\mathbb{R}\times\overline{\mathbb{R}}_+$ 上, 问题

$$u_{tt}=u_{xx},\quad u\big|_{t=0}=0,\quad u_t\big|_{t=0}=(1+x^2)^{\operatorname{Im}a}e^{ax^2}$$

的解 $u(x,t)$ 对这些 $a$ 是有界的.

**3.9** 设 $u(x,t;a),(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, 是柯西问题

$$u_{tt}=a^2u_{xx},\quad u\big|_{t=0}=\frac{1}{1+x^2},\quad u_t\big|_{t=0}=0$$

的解. 证明 $u(x,t;a)$ 关于 $a$ 是递降的.

**3.10** 设 $u(x,t),(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, 是柯西问题

$$u_{tt}=a^2u_{xx},\quad u\big|_{t=0}=\varphi(x),\quad u_t\big|_{t=0}=\psi(x)$$

的解, 并且对于 $|x| \geqslant 1, \varphi(x) = \psi(x) = 0$.

证明: 对任意的 $x_0$ 存在这样的数 $t_0$ 与 $c$, 使得对所有的 $t \geqslant t_0$ 有 $u(x_0, t) = c$. 求出这些数.

**3.11**　设 $u(x,t), (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, 是柯西问题

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\big|_{t=0} = 0$$

的解, 并且对所有 $x \in \mathbb{R}, |\varphi(x)| \leqslant 1$; 对 $|x| \geqslant 1, \varphi(x) = 0$.

求这样一些 $\tau$ 值集合的下界, 使得对所有 $t \geqslant \tau, x \in \mathbb{R}$ 及任意具有上述性质的 $\varphi$ 成立不等式 $|u(x,t)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

**3.12**　设 $\{u_k(x,t)\}(k = 1, 2, \cdots)$ 是满足如下关系的 $C^2$ 类函数序列:

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} = k^\alpha \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant t \leqslant k;$$
$$u_k\big|_{t=0} > 0 \quad \text{当 } k^\beta < x < +\infty, \quad u_k\big|_{t=0} = 0 \quad \text{当 } -\infty < x \leqslant k^\beta;$$
$$\left.\frac{\partial u_k}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

对哪些 $\alpha > 0, \beta > 0$ 存在这样的不依赖于 $k$ 的 $x_0$, 使得对 $(x,t) \in (-\infty, x_0] \times [0, k] (k = 1, 2, \cdots), u_k(x,t) = 0$?

**3.13**　在 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$ 中求问题

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}, \quad u\big|_{t=0} = e^{-x^2} + \arctan y, \quad u_t\big|_{t=0} = \cos x + \sin y$$

的解 $u(x,y,t)$.

**3.14**　在 $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$ 中求问题

$$u_{tt} = \Delta_x u, \quad u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = |x|^7$$

的解 $u(x,t),\ x = (x_1, x_2, x_3)$.

**3.15**　在 $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$ 中求问题

$$u_{tt} = \Delta_x u, \quad u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = \frac{1}{1 + (x_1 + x_2 + x_3)^2}, \quad x \in \mathbb{R}^3$$

的解 $u(x,t),\ x = (x_1, x_2, x_3)$.

**3.16**　求柯西问题

$$u_{tt} = 4(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \quad t > 0, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x,y,z), \quad u_t\big|_{t=0} = 0$$

对以下的函数 $\varphi(x,y,z)$ 的解:

a) $\varphi = \sin x + e^{2z}$, b) $\varphi = (yz)^2$, c) $\varphi = (3x - y + z)e^{3x-y+z}$.

**3.17** 设 $u(x,t)$ 是 $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}_+$ 中柯西问题

$$u_{tt}=\Delta_x u,\quad u\big|_{t=0}=0,\quad u_t\big|_{t=0}=(1+4|x|^2)^{-\frac{1}{2}}$$

的解, 求 $\lim\limits_{t\to+\infty}u(0,t)$.

**3.18** 设 $u(x_1,x_2,t)$ 是 $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}_+$ 中柯西问题

$$u_{tt}=u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2},\quad u\big|_{t=0}=0,\quad u_t\big|_{t=0}=\psi(x_1,x_2)\in C^2(\mathbb{R}^2)$$

的解, 其中在 $B_1^2(0)$ 中 $\psi(x_1,x_2)>0$, 在 $\mathbb{R}^2\diagdown B_1^2(0)$ 中 $\psi(x_1,x_2)=0$.

a) 对哪些 $(x_1,x_2,t)$, 函数 $u(x_1,x_2,t)$ 等于零?

b) 在

$$\psi(x_1,x_2)=(1-x_1^2-x_2^2)_+^3$$

的情形下, 求 $\lim\limits_{t\to+\infty}tu(x_1,x_2,t)$.

**3.19** 设 $u(x_1,x_2,t)$ 是 $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}_+$ 中柯西问题

$$u_{tt}=u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2},\quad u\big|_{t=0}=0,\quad u_t\big|_{t=0}=\psi(x_1,x_2)\in C^2(\mathbb{R}^2)$$

的解, 其中当 $(x_1,x_2)\in[0,1]\times[0,2]$ 时 $\psi(x_1,x_2)=0$, 对其余的 $(x_1,x_2)$, $\psi(x_1,x_2)>0$.

a) 借助不等式描述使得 $u(x_1,x_2,t)=0$ 的所有那些值 $(x_1,x_2,t)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}_+$ 的集合.

b) 描绘出这个集合.

**3.20** 设 $u(x,t)$ 是 $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}_+$ 中柯西问题

$$u_{tt}=\Delta_x u,\quad u\big|_{t=0}=0,\quad u_t\big|_{t=0}=\psi(x)$$

的解, 其中当 $0.9\leqslant|x|\leqslant 1$ 时 $\psi(x)=0$, 对其余的 $x$ 有 $\psi(x)>0$.

对哪些 $(x,t)$, 函数 $u(x,t)$ 等于零?

**3.21** 设 $\{u_\varepsilon(x,y,t)\}(0<\varepsilon\leqslant\dfrac{1}{2})$ 是 $C^2$ 类函数族, 它们满足如下关系:

$$\begin{aligned}&\varepsilon\frac{\partial^2u_\varepsilon}{\partial t^2}=\frac{\partial^2u_\varepsilon}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u_\varepsilon}{\partial y^2},\quad(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad 0\leqslant t\leqslant\varepsilon^{-m};\\&u_\varepsilon\big|_{t=0}=0,\quad(x,y)\in\mathbb{R}^2;\end{aligned}$$

对 $x^2+y^2\leqslant\varepsilon^{-q}$ 有 $\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0$, 对 $x^2+y^2>\varepsilon^{-q}$ 有 $\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\bigg|_{t=0}>0$. 对哪些 $m>0,q>0$ 存在不依赖于 $\varepsilon$ 的 $\rho>0$, 使得对于 $x^2+y^2\leqslant\rho^2, 0\leqslant t\leqslant\varepsilon^{-m}(0<\varepsilon\leqslant\dfrac{1}{2})$ 成立 $u_\varepsilon(x,y,t)=0$?

**3.22** 设 $u(x,t)$ 是柯西问题

$$u_{tt}=\Delta u,\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad t>0,\quad u\big|_{t=0}=0,\quad u_t\big|_{t=0}=\psi(x)$$

的解, 并且其中 $\psi(x) \geqslant 0$. 对哪些 $n \in \{1,2,3\}$, 如下断言成立: 如果集合 $\{x \in \mathbb{R}^n | \psi(x) = 0\}$ 连通, 那么集合 $\{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ | u(x,t) = 0\}$ 也是连通的?

**3.23** 设 $u(x,t) \in C^2(\mathbb{R}^3 \times (0,+\infty)) \cap C^1(\mathbb{R}^3 \times [0,+\infty))$ 是波动方程柯西问题

$$u_{tt} = \Delta u, \quad u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = \varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$$

的解. 函数 $u$ 的支集是否可能位于柱形 $B_R^3(0) \times [0,+\infty)$ 内?

## 3.2 半有界弦的混合问题

求函数 $u(x,t)$ 使其满足方程

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad (a>0), \quad x>0, t>0,$$

以及当 $t=0$ 时的初始条件

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \quad x>0,$$

和当 $x=0$ 时边界条件

$$u\big|_{x=0} = \mu(t) \quad (\text{第 I 类条件}),$$

$$\text{或 } u_x\big|_{x=0} = \mu(t) \quad (\text{第 II 类条件}),$$

$$\text{或 } (u_x - \alpha u)\big|_{x=0} = \mu(t) \quad (\text{第 III 类条件})$$

称为对半有界弦的混合问题或初边值问题. 在 $\mu(t) \equiv 0$ 的情形, 边界条件称为齐次的. 还可考虑其他形状的边界条件.

为使古典解 $u \in C^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$ 存在, 需要补充初始条件及边界条件在点 $(0,0)$ 处的相容条件. 例如, 如果

$$\mu(0) = \varphi(0)(= u(0,0)), \quad \mu'(0) = \psi(0)(= u_t(0,0)),$$
$$\mu''(0) = a^2\varphi''(0) \quad (u_{tt}(0,0) = a^2 u_{xx}(0,0)),$$

那么第 I 类边值问题的古典解存在.

弦振动齐次方程的通解具有如下形状:

$$u(x,t) = f(x-at) + g(x+at);$$

$f(x-at)$ 是右行波, $g(x+at)$ 是左行波.

函数 $f(\xi)$ 与 $g(\xi)$ 对自变量的正值可由初始条件确定, 从而对 $x > at$ 可由达朗贝尔公式得到解

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)d\xi.$$

为了求出当 $0 < x < at$ 时的解, 要由 $x = 0$ 时的边界条件求出当 $\xi < 0$ 时的函数 $f(\xi)$. 例如, 对于第一类边界条件我们有

$$u\big|_{x=0} = f(-at) + g(at) = \mu(t), \quad f(\xi) = \mu\left(-\frac{\xi}{a}\right) - g(-\xi), \quad \xi < 0.$$

在第二类和第三类边界条件的情形, $\xi < 0$ 时的 $f(\xi)$ 是一阶常微分方程的解, 它依赖于一个任意常数, 这个常数可由解 $u(x,t)$ 在主特征 $x = at$ 上的连续性条件求出.

**附注** 如果方程是非齐次的, 那么应当求出非齐次方程的任一个特解 $w(x,t)$, 把所求的解 $u(x,t)$ 表示为和的形状: $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$, 并把 $u(x,t)$ 的表示代入方程和初始条件及边界条件. 这时对新的未知函数 $v(x,t)$ 得到具有新的初始条件及边界条件的齐次方程.

**特殊情形**

对于第一类齐次边界条件

$$u\big|_{x=0} = 0,$$

一般方法和初始条件的奇延拓方法一样可给出结果. 为得到 $u(x,t)$, 可以在区域 $x < 0$ 中对函数 $\varphi$ 与 $\psi$ 作奇延拓:

$$\widetilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geqslant 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0, \end{cases} \quad \widetilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geqslant 0, \\ -\psi(-x), & x < 0; \end{cases}$$

应用达朗贝尔公式求出对 $\widetilde{\varphi}$ 及 $\widetilde{\psi}$ 的柯西问题 $(x \in \mathbb{R})$ 的解. 函数 $u(x,t)$ 则是对上述所得解仅考虑 $x \geqslant 0$ 的情形.

在第二类齐次边界条件的情形

$$u_x\big|_{x=0} = 0,$$

应用对初始条件作偶延拓的方法是方便的. 为得到函数 $u(x,t)$, 可以在区域 $x < 0$ 对函数 $\varphi$ 与 $\psi$ 作偶延拓:

$$\widetilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geqslant 0, \\ \varphi(-x), & x < 0, \end{cases} \quad \widetilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geqslant 0, \\ \psi(-x), & x \leqslant 0; \end{cases}$$

应用达朗贝尔公式求出对于 $\widetilde{\varphi}$ 及 $\widetilde{\psi}$ 的柯西问题 $(x \in \mathbb{R})$ 的解. 函数 $u(x,t)$ 则是对上述所得解仅考虑 $x \geqslant 0$ 的情形.

在这里相容性条件变成函数 $\widetilde{\varphi} \in C^2(\mathbb{R})$ 与 $\widetilde{\psi} \in C^1(\mathbb{R})$ 在零点的光滑性条件了.

## 习题

**3.24** 设 $u(x,t)$ 是在 $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+$ 中问题

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u_x\big|_{x=0} = 0,$$

$$u\big|_{t=0} = \begin{cases} -\sin^3 x, & \pi < x < 2\pi, \\ 0, & x \notin (\pi, 2\pi), \end{cases} \quad u_t\big|_{t=0} = 0$$

的解.

a) 求集合 $\{(x,t) \in \overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ | u(x,t) \neq 0\}$.

b) 描绘出这个集合.

c) 描绘出 $u\left(x, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ 及 $u\left(x, \dfrac{5\pi}{2}\right)$ 的图像.

**3.25** 对哪些 $\lambda =$ 常数及 $\varphi(x)$ 存在乃是如下问题在 $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+$ 中的解的函数 $u(x,t) \in C^2(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+)$ :

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad (u_t + \lambda u_x)\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\big|_{t=0} = 0?$$

求出这个函数.

**3.26** 对哪些 $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ 与 $\psi \in C^2(\mathbb{R})$ 存在 $\mathbb{R}^2$ 中问题

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u\big|_{t=x} = \varphi(x), \quad u_t\big|_{t=x} = \psi(x)$$

的解 $u(x,t) \in C^2(\mathbb{R}^2)$?

**3.27** 对哪些 $A$ 与 $\omega$ 存在 $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+$ 中边值问题

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u\big|_{x=0} = \cos\omega t, \quad u\big|_{t=0} = Ae^{-x^2}, \quad u_t\big|_{t=0} = 0$$

的解 $u \in C^2(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+)$? 求出这个解.

**3.28** 在四分之一的平面 $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+$ 上考虑问题

$$u_{tt} = \frac{1}{4}u_{xx}, \quad (u_x - u)\big|_{x=0} = \alpha(t), \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\big|_{t=0} = 0.$$

a) 设 $\varphi(x)$ 与 $\alpha(t)$ 是以 $2\pi$ 为周期的周期函数, 且在闭区间 $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上等于零. 求出并描绘出使得函数 $u(x,t)$ 明显等于零的最大集合.

b) 设 $\varphi(x) = (\cos_+(x))^\beta$ (其中 $f_+(x) = \max(0, f(x))$. 求为使上述问题存在古典解, 有关函数 $\alpha(t)$ 及正常数 $\beta > 0$ 应满足的充分必要条件.

**3.29** 对哪些 $k, \alpha$ 与 $\beta$, 在 $\overline{D} = \{(x,t) | kt \leqslant x < +\infty,\ 0 < t < +\infty\}$ 中存在下述问题

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u\big|_{x=kt} = \alpha t^\beta, \quad u\big|_{t=0} = u_t\big|_{t=0} = 0$$

的解 $u(x,t) \in C^2(\overline{D})$? 解是唯一的吗?

**3.30** 求问题

$$u_{tt} = u_{xx}; \quad u\big|_{t=x} = \varphi(x) \in C^2([0,1]), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1;$$
$$u\big|_{t=2x} = \psi(x) \in C^2\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right), \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$$

的解 $u(x,t)$. 这里 $\varphi^{(k)}(0) = \psi^{(k)}(0) = 0,\ k = 0,1,2$.

a) 借助于不等式, 描述使得这个问题的解 $u(x,t)$ 唯一确定的所有值 $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ 的集合.

b) 描绘出这个集合.

c) 求出所考虑问题的解 $u(x,t)$.

## 3.3 有界弦. 傅里叶方法

**施图姆 – 刘维尔 (Sturm-Liouville) 问题**

考虑施图姆 – 刘维尔微分算子

$$L := \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) - q(x), \quad L[u] = (p'u)' - qu,$$

的形如

$$\begin{cases} L[u] = -\lambda u, & \text{当 } x \in (0,1) \\ u\big|_{x=0} = 0, \\ u\big|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

的谱问题, 其中, 在 $[0,l]$ 上 $q(x) \geqslant 0$, 且在 $[0,l]$ 上 $p(x) \geqslant p_0 > 0$.

**定理 1** 1) 算子 $L$ 是对称、负定的, 即

$$(L[u],v)_{L_2(0,1)} = (u,L[v])_{L_2(0,1)}, \quad (L[u],u)_{L_2(0,1)} \leqslant -\kappa^2(u,u).$$

2) 如果 $L[u] = -\lambda u,\ L[v] = -\lambda v$, 那么函数 $u(x)$ 与 $v(x)$ 线性相关; 如果 $L[u] = -\lambda u,\ L[v] = -\mu v$ 且 $\lambda \neq \mu$, 那么有 $(u,v)_{L_2(0,1)} = 0$.

3) 以 $\lambda_k$ 与 $X_k(x),\ k \in \mathbb{N}$, 表示算子 $L$ 的本征值与本征向量, 即 $L[X_k] = -\lambda_k X_k, X_k \neq 0$. 那么集合 $\{X_k\}$ 在 $L_2(0,1)$ 中构成完全正交系, 而 $|\lambda_k| \to +\infty$.

**傅里叶方法**

具有固定端点的有界弦的本征振动 (固有振动) 的研究归结为问题

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x \in (0,l), \quad t > 0, \quad u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = 0, \tag{3.1}$$
$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x). \tag{3.2}$$

这就是所谓的弦振动方程的混合问题或初—边值问题. 这个问题的解可在 $C^2((0,l)\times\mathbb{R}_+)\cap C^1([0,l]\times\overline{\mathbb{R}}_+)$ 类的函数 $u(x,t)$ 中求出.

(3.1) 中在每一个端点 $x=0$ 和 $x=l$ 上的边界条件可以用上面对半有界弦指出的三种类型边界条件 (它们是彼此无关的) 来代替. 相应地, 为使问题 (3.1)~(3.2) 的古典解存在, 还必须在两个点 $(0,0)$ 与 $(l,0)$ 满足相容性条件.

在闭区间上初 – 边值问题的解, 通常是用标准的傅里叶方法来构造, 即依照相应的施图姆 – 刘维尔问题的本征函数 $X_k(x)$ 展开成级数. 在第 I 类与第 II 类齐次边值问题的情形, 在两个端点基函数 $X_k$ 具有如下形状:

$$X_k(x)=\sin\frac{\pi kx}{l}\ (k\in\mathbb{N}),\quad \text{在 } u\big|_{x=0}=u\big|_{x=l}=0 \text{ 的情形;}$$

$$X_0(x)\equiv 1, X_k(x)=\cos\frac{\pi kx}{l},\quad \text{在 } u_x\big|_{x=0}=u_x\big|_{x=l}=0 \text{ 的情形;}$$

$$X_k(x)=\sin\frac{\pi(k-\frac{1}{2})x}{l},\quad \text{在 } u\big|_{x=0}=u_x\big|_{x=l}=0 \text{ 的情形;}$$

$$X_k(x)=\cos\frac{\pi(k-\frac{1}{2})x}{l},\quad \text{在 } u_x\big|_{x=0}=u\big|_{x=l}=0 \text{ 的情形.}$$

例如, 问题 (3.1) ~ (3.2) 的解由下述公式给出:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{\pi kat}{l}+B_k\sin\frac{\pi kat}{l}\right)\sin\frac{\pi kx}{l},$$

$$A_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{\pi kx}{l}dx,\quad B_k=\frac{2}{\pi ka}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{\pi kx}{l}dx.$$

对所考虑的混合问题, 函数

$$E(t)=\int_0^l\left[\frac{1}{2}u_t^2(x,t)+\frac{a^2}{2}u_x^2(x,t)\right]dx$$

称为**能量积分**.

在两个端点 $x=0$ 及 $x=l$ 有第 I 类或第 II 类齐次边值条件的情况下, 对这个问题的任何古典解 $u(x,t)$, 能量恒等式

$$E(t)\equiv \text{常数}$$

成立.

## 习题

**3.31** 设 $u(x,t)$ 是 $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+$ 中问题

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u_x\big|_{x=0} = 0,$$
$$u\big|_{t=0} = \begin{cases} \sin^3 x, & \pi < x < 2\pi, \\ 0, & x \notin (\pi, 2\pi), \end{cases} \quad u_t\big|_{t=0} = 0$$

的解.

a) 画出 $u(x,2\pi)$ 的图像.

b) 当 $x \in [0,2\pi], t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ 并且补充条件 $u\big|_{x=2\pi} = 0$ 时, 考虑上述方程, 并画出 $u(x,2\pi)$ 的图像.

c) 对于上述补充条件改为 $u_x\big|_{x=2\pi} = 0$ 的情况画出 $u(x,2\pi)$ 的图像.

**3.32** 指出使得在矩形 $\overline{Q} = [0,\pi] \times [0,\pi]$ 中的混合问题

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u\big|_{x=0} = u\big|_{x=\pi} = 0,$$
$$u\big|_{t=0} = \alpha x^4 + \beta x^3 + \sin x, \quad u_t\big|_{t=0} = \gamma \cos x$$

解存在的所有常数 $\alpha, \beta$ 与 $\gamma$ 的值. 求出这个解.

**3.33** 设 $u(x,t)$ 是在 $[0,1] \times \overline{\mathbb{R}}_+$ 中混合问题

$$u_{tt} = 4u_{xx}, \quad u\big|_{x=0} = u\big|_{x=1} = 0,$$
$$u\big|_{t=0} = 4\sin^3 \pi x, \quad u_t\big|_{t=0} = 30x(1-x)$$

的解.

a) 求 $f\left(\frac{1}{3}\right)$, 其中 $f(t) = \int_0^1 [u_t^2(x,t) + 4u_x^2(x,t)]dx.$

b) 求 $u(x,2)$.

**3.34** 设 $u(x,t)$ 是 $[0,\pi] \times \overline{\mathbb{R}}_+$ 中混合问题

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u\big|_{x=0} = u\big|_{x=\pi} = 0, \quad u\big|_{t=0} = \sin^{100} x, \quad u_t\big|_{t=0} = 0$$

的解. 在测度大于 1 的集合上 $\left|u_t\left(x, \frac{\pi}{2}\right)\right| > 100$ 是否正确?

**3.35** 设 $u(x,t)$ 是在 $[0,1] \times \overline{\mathbb{R}}_+$ 中混合问题

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u\big|_{x=0} = u\big|_{x=1} = 0, \quad u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = x^2(1-x)$$

的解. 求 $\lim\limits_{t\to+\infty} \int_0^1 [u_t^2(x,t) + u_x^2(x,t)]dx.$

**3.36**　设 $u(x,t)$ 是 $[0,1]\times\overline{\mathbb{R}}_+$ 中混合问题

$$u_{tt}=u_{xx},\quad u\big|_{x=0}=u\big|_{x=1}=0,\quad u\big|_{t=0}=0,\quad u_t\big|_{t=0}=x^2(1-x)^2$$

的解. 求 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int\limits_0^{1/2}[u_t^2(x,t)+u_x^2(x,t)]dx$.

**3.37**　设 $u(x,t)$ 是在 $\overline{Q}=[0,\pi]\times\overline{\mathbb{R}}_+$ 中混合问题

$$u_{tt}=u_{xx}+\sin x\cos 5x\sin\omega t,$$
$$u\big|_{x=0}=u\big|_{x=\pi}=0,\quad u\big|_{t=0}=u_t\big|_{t=0}=0$$

的解. 求所有使得 $\sup\limits_{\overline{Q}}|u(x,t)|<+\infty$ 的 $\omega$.

**3.38**　设 $u(x,t)$ 是在 $\overline{Q}=[0,1]\times\overline{\mathbb{R}}_+$ 中混合问题

$$u_{tt}=u_{xx},\quad u\big|_{x=0}=0,\quad u\big|_{x=1}=\sin\alpha t,\quad u\big|_{t=0}=0,\quad u_t\big|_{t=0}=\alpha x$$

的解. 求所有使得 $\sup\limits_{\overline{Q}}|u(x,t)|<+\infty$ 的 $\alpha$.

**3.39**　a) 求出所有这样的 $k>0$, 对这些 $k$, 对某个函数 $\varphi\in C^\infty((0,\pi))$, 在 $[0,\pi]\times\overline{\mathbb{R}}_+$ 中存在问题

$$u_{tt}=9u_{xx},\quad u\big|_{x=0}=(u_x-ku)\big|_{x=\pi}=0,$$
$$u\big|_{t=0}=0,\quad u_t\big|_{t=0}=\varphi(x)$$

的无界解.

b) 对 $k=1$ 指出所有使得上述问题的解 $u(x,t)$ 为有界的函数 $\varphi(x)\in C^\infty((0,\pi))$.

**3.40**　设 $u(x,t)\in C^2((0,\pi)\times(0,+\infty))\cap C^1([0,\pi]\times[0,+\infty))$ 是在 $[0,\pi]\times\overline{\mathbb{R}}_+$ 中边值问题

$$u_{tt}=u_{xx},\quad u\big|_{x=0}=f(t),\quad u\big|_{x=\pi}=0,\quad u\big|_{t=0}=u_t\big|_{t=0}=0$$

的解, $f(t)$ 是光滑函数, 当 $t\to+\infty$ 时 $f(t)\to 0$. 这个问题的解是否可能随时间, 即随变量 $t$ 的增长而无界增长?

# 第 4 章　抛物型方程

## 4.1　边值问题

在有界区域 $\Omega$ 求满足条件

$$u_t = a^2\Delta_x u, \quad u\big|_{x\in\partial\Omega} = 0, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x) \in C(\Omega)$$

的函数 $u(x,t) \in C^2(Q_\Omega^T) \cap C(\overline{Q}_\Omega^T), T > 0$ 或 $T = +\infty$, 其中 $\varphi(x)$ 是给定的函数, 称为在有界区域 $\Omega$ 中热传导方程第一混合问题或第一初 - 边值问题. 边界条件可以是非齐次的.

如果对 $x \in \partial\Omega$ 给定的不是函数 $u$ 的值这种条件, 而是给定 $u$ 的法向导数的值或者是函数本身及其法向导数的线性组合的值, 那么分别称为第 II 或第 III 边值问题.

柱体内的**极值原理**. 如果函数 $u(x,t) \in C^2(Q_\Omega^T) \cap C(\overline{Q}_\Omega^T)$ 在柱体 $Q_\Omega^T$ 中满足热传导方程, 那么它要么在柱体的下底 $t = 0$, 要么在柱体的侧曲面 $x \in \partial\Omega$ 上取到其最大值 (及最小值).

通常, 上述问题的解是用傅里叶方法来构造. 例如, 对一维空间变量 $x \in (0,l)$, 问题

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = 0, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x)$$

的解由下述公式给出:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\left(\frac{\pi k a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{\pi k x}{l}, \quad C_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi k x}{l}\,dx.$$

## 习题

**4.1**　热传导方程的第一边值问题的解是否可能在内点取异于常数的最小值?

**4.2**　设 $u \in C^{2,1}_{x,t}(\overline{Q})$ 是 $\overline{Q} := [0,1] \times [0,1]$ 中问题

$$u_t = u_{xx}, \quad u\big|_{x=0} = u\big|_{x=1} = 0, \quad u\big|_{t=0} > 0$$

的解. 函数 $f(t) := \int\limits_0^1 u^2(x,t)dx$ 在开区间 $(0,1)$ 内部是否可能有极大值?

**4.3**　设 $u \in C^{2,1}_{x,t}(Q) \cap C(\overline{Q})$ 是在 $Q := (-1,1) \times (0,1]$ 中方程

$$u_t = u_{xx} + q(x,t)u, \quad \text{其中 } q \in C(\overline{Q})$$

的解. 记 $M := \max\limits_{\overline{Q}} u$, $m := \max\limits_{\Gamma} u$, 其中 $\Gamma := \overline{Q} \diagdown Q$. 如果 a) $q(x,t) \equiv 0$; b) $q(x,t) > 0$; c) $q(x,t) < 0, M > 0$, 是否可能 $M > m$?

**4.4**　设 $Q := (0,1) \times (0,1]$. 是否存在具有下述性质的函数 $u(x,t) : u \in C^{2,1}_{x,t}(Q) \cap C(\overline{Q})$;

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \quad (x,t) \in Q; \\ u\big|_{t=0} &= 2\sin \pi x, \quad u\big|_{t=1} = 3\sin \pi x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ u\big|_{x=0} &= \sin \pi t, \quad u\big|_{x=1} = \sin \pi t + 2\sin 2\pi t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1? \end{aligned}$$

**4.5**　设 $\overline{Q} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + t^2 \leqslant 1\}$. 是否存在满足方程

$$u_t = u_{xx} + 1 \quad \text{在 } \overline{Q}, \quad \text{及条件 } xu_x = tu \quad \text{在 } \partial Q$$

的函数 $u \in C^2(\overline{Q})$?

**4.6**　设函数 $u(x,t) \in C^{2,1}_{x,t}(\overline{Q}) \cap C^3(Q)$ 是在 $Q := (0,3) \times (0,1]$ 中边值问题

$$u_t = u_{xx}, \quad u\big|_{x=0} = e^{-t/4}, \quad u\big|_{x=3} = 2e^{-\frac{t}{64}}, \quad u\big|_{t=0} = \sqrt{x+1}$$

的解. $u(x,t)$ 在 $\overline{Q}$ 中关于 $t$ 递减的断言是否成立?

**4.7**　设函数 $u_k(x,t) \in C^{2,1}_{x,t}(Q_k) \cap C(\overline{Q}_k)$, $k = 1,2$, 是在 $Q_k := Q^T_{(-k,k)}$ 中边值问题

$$(u_k)_t = (u_k)_{xx}, \quad u_k\big|_{x=\pm k} = 0, \quad u_k\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad |x| \leqslant k$$

的解. 这里 $\varphi \in C^1([-2,2])$; 当 $|x| \leqslant 1$ 时 $\varphi(x) \geqslant 0$ 及当 $1 \leqslant |x| \leqslant 2$ 时 $\varphi(x) = 0$; $\varphi \not\equiv 0$.

证明: $u_1(x,t) < u_2(x,t)$, $\forall (x,t) \in [-1,1] \times (0,T]$.

**4.8**　设 $u(x,t) \in C^{2,1}_{x,t}(Q) \cap C(\overline{Q})$ 是在 $Q := Q^{\infty}_{(-\pi,\pi)}$ 中边值问题

$$u_t = u_{xx}, \quad u\big|_{x=\pm\pi} = 0, \quad u\big|_{t=0} = \sin^2 x$$

的解. 求 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int\limits_0^\pi u(x,t)dx$.

**4.9** 当函数 $\varphi(x)\in C_0^\infty((0,1))$ 时, 在怎样的条件下, 半带形 $Q_{(0,1)}^\infty$ 中的边值问题

a) $u_t=u_{xx},\ u\big|_{x=0}=u_x\big|_{x=1}=0,\ u\big|_{t=0}=\varphi(x)$;

b) $u_t=u_{xx},\ u_x\big|_{x=0}=u_x\big|_{x=1}=0,\ u\big|_{t=0}=\varphi(x)$

的任意解 $u(x,t)$ 具有当 $t\to+\infty$ 时 $u(x,t)\to 0$ 的性质?

**4.10** 设 $u(x,t)\in C_{x,t}^{2,1}(Q)\cap C(\overline{Q})$ 是在 $Q:=Q_{(0,1)}^\infty$ 中问题

$$u_t=u_{xx}+\alpha u,\quad u\big|_{x=0}=u\big|_{x=1}=0,\quad u\big|_{t=0}=\varphi(x)$$

的解. 求所有使得对任意初始函数 $\varphi\in C([0,1]),\varphi(0)=\varphi(1)=0$ 成立

$$\lim_{t\to+\infty}u(x,t)=0,\quad \forall x\in[0,1]$$

的 $\alpha\in\mathbb{R}$.

**4.11** 设 $u(x,t)$ 是 $Q_{(0,\pi)}^\infty$ 中边值问题

$$u_t=u_{xx},\quad u\big|_{x=0}=u\big|_{x=\pi}=0,\quad u\big|_{t=0}=\varphi(x)$$

的解, 其中 $\varphi\in C^1([0,\pi]),\varphi(0)=\varphi(\pi)=0$. 指出所有这样的函数 $\varphi(x)$ 的类: 对它们有

$$\lim_{t\to+\infty}e^t u(x,t)=0,\quad \forall x\in[0,\pi].$$

**4.12** 设 $u(x,t)$ 是在半带形 $Q_{(0,3\pi)}^\infty$ 中问题

$$u_t=u_{xx},\quad u\big|_{x=0}=u\big|_{x=3\pi}=0,\quad u\big|_{t=0}=\varphi(x)$$

的解, 其中 $\varphi\in C^1[0,3\pi],\varphi(0)=\varphi(3\pi)=0$. 指出所有这样的函数 $\varphi(x)$ 的类: 对它们

a) 存在有限的 $\lim\limits_{t\to+\infty}e^{\sqrt{t}}u(x,t)$;

b) 存在有限的 $\lim\limits_{t\to+\infty}e^{t}u(x,t)$;

c) 存在有限的 $\lim\limits_{t\to+\infty}e^{t^2}u(x,t)$.

**4.13** 设 $u(x,t)$ 是 $Q_{(0,\frac{\pi}{2})}^\infty$ 中边值问题

$$u_t=u_{xx},\quad u\big|_{x=0}=1,\quad u\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=4,\quad u(x,0)=\cos^4x+4\sin^5x$$

的解. 求 $\lim\limits_{t\to+\infty}u(x,t)$.

**4.14** 设 $u\in C_{x,t}^{2,1}(Q)\cap C(\overline{Q})$ 是 $Q:=Q_\Omega^\infty$ 中问题

$$u_t=u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2},$$
$$u\big|_{x_1=0}=u\big|_{x_2=0}=0,\quad u\big|_{x_1=1}=x_2,\quad u\big|_{x_2=1}=x_1$$

的解, 其中 $\Omega=(0,1)\times(0,1)$. 求 $\lim\limits_{t\to+\infty}u(x_1,x_2,t)$.

**4.15** 设 $u(x,t)$ 是半带形 $Q^{\infty}_{(0,l)}$ 中问题

$$u_t=u_{xx},\quad u\big|_{x=0}=u\big|_{x=l}=t,\quad u\big|_{t=0}=\varphi(x)$$

的解, 其中 $\varphi(x)\in C^1([0,l]),\varphi(0)=\varphi(l)=0$. 求 $\lim\limits_{t\to+\infty}t^{-1}u(x,t)$.

**4.16** 设函数 $u_1$ 与 $u_2$ 满足关系式

$$\begin{aligned}&(u_k)_t=(u_k)_{xx},\quad 0\leqslant x\leqslant\pi,\quad 0\leqslant t<+\infty;\\ &u_k\big|_{t=0}=\sin^2 x-\alpha\sin^4 x\quad (k=1,2);\\ &u_1\big|_{x=0}=u_1\big|_{x=\pi}=0,\quad (u_2)_x\big|_{x=0}=(u_2)_x\big|_{x=\pi}=0,\quad 0\leqslant t<+\infty.\end{aligned}$$

对哪些 $\alpha$, 不等式

$$\lim_{t\to+\infty}u_1(x,t)<\lim_{t\to+\infty}u_2(x,t),\quad \forall x\in[0,\pi]$$

成立?

**4.17** 设函数 $u(x,t)$ 是 $Q^{\infty}_{(0,2)}$ 中问题

$$u_t=u_{xx},\quad u_x\big|_{x=0}=u_x\big|_{x=2}=3,\quad u\big|_{t=0}=x^3-3x^2+3x$$

的解. 求 $\lim\limits_{t\to+\infty}u(x,t)$.

**4.18** 设函数 $u(x,t)$ 是 $Q^{\infty}_{(0,2)}$ 中问题

$$u_t=u_{xx},\quad u_x\big|_{x=0}=1,\quad u_x\big|_{x=2}=13,\quad u\big|_{t=0}=x^3+x$$

的解. 求 $\lim\limits_{t\to+\infty}u(x,t)$.

**4.19** a) 求出所有 $l>0$, 对于这些 $l$ 当某些函数 $\varphi(x)\in C^{\infty}((0,l))$ 时, 在 $Q^{\infty}_{(0,l)}$ 中边值问题

$$u_t=2u_{xx},\quad u\big|_{x=0}=(u_x-3u)\big|_{x=l}=0,\quad u\big|_{t=0}=\varphi(x)$$

存在无界解.

b) 对 $l=1$, 列出所有使得这个问题的解有界的函数 $\varphi(x)\in C^{\infty}((0,l))$.

**4.20** a) 不恒等于常数的函数 $u(x,t)$ 在区域 $\Omega_T=\{(x,t)|0<t<T,0<x<5-\exp(-t)\}$ 中满足方程

$$u_t=u_{xx}.$$

证明: 这个函数在 $\overline{\Omega}_T$ 上的最大值既不可能在 $\Omega_T$ 的内点达到, 也不可能在 $t=T$ 达到.

b) 设 $u(x,t)$ 是问题

$$\begin{aligned}&u_t = u_{xx}, \quad \text{在区域 } t>0, 0<x<5-\exp(-t) \text{ 中},\\ &u\big|_{x=0} = u\big|_{x=5-\exp(-t)} = 0, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x)\end{aligned} \tag{4.1}$$

的解, 其中 $\varphi(x) \in C_0^\infty((0,4))$. 证明: $|u(x,t)| < Ce^{-\frac{t}{4}}$.

c) 举出这样函数 $\varphi(x) \in C_0^\infty((0,4))$ 的例子: 它使得对问题 (4.1) 的解 $u(x,t)$ 成立

$$\max_{x\in(0,5-\exp(-t))} u(x,t) > e^{-t}, \quad \forall t>0,$$

假定上述解存在.

**4.21** 设 $u(x,t)$ 是 $Q^\infty_{(0,\pi)}$ 中问题

$$u_t = u_{xx}, \quad u\big|_{x=0} = u_x\big|_{x=\pi} = 0, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x)$$

的解, 其中 $\varphi(0) = \varphi'(\pi) = 0$.

a) 证明: $\sup\limits_{0<x<\pi} |u(1,x)| \leqslant \sup\limits_{0<x<\pi} |\varphi(x)|$.

b) $\sup\limits_{0<x<\pi} |u(1,x)| \leqslant \dfrac{1}{2} \sup\limits_{0<x<\pi} |\varphi(x)|$ 是否成立?

**4.22** 设函数 $u(x,t) \in C^2(Q) \cap C(\overline{Q})$ 是 $Q := Q^T_\Omega$ 中边值问题

$$u_t = \Delta u + f(x), \quad u\big|_{x\in\partial\Omega} = 0, \quad u\big|_{t=0} = 0$$

的解, 其中对 $x \in \Omega$ 有 $f(x) \leqslant 0$. 证明: 对于固定的 $x_0 \in \Omega$, 函数 $u(x_0,t)$ 是关于 $t \in (0,T)$ 非增的.

**4.23** 设 $u(x,t) \in C^2(Q) \cap C(\overline{Q})$ 是 $Q := Q^\infty_{(0,1)}$ 中边值问题

$$u_t = u_{xx} + v(x,t), \quad u\big|_{x=0} = u\big|_{x=1} = 0, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x) \in C^\infty([0,1])$$

的古典解. $v(x,t)$ 是有界可测函数, $v(x,t)$ 满足估计 $|v| \leqslant C$, $C>0$ 是给定常数.

是否可以选择函数 $v(x,t)$, 使得对所有的 $t>t_*$ 有 $u(x,t) \equiv 0$? 其中 $t_*$ 是某个正的常数.

**4.24** 设 $u(x,t) \in C^2(Q) \cap C^1(\overline{Q})$ 是 $Q := Q^\infty_{(0,1)}$ 中边值问题

$$u_t = u_{xx} + 3u, \quad u\big|_{x=0} = u\big|_{x=1} = 0$$

的古典解. 证明: 对于 $u(x,t)$ 成立不等式

$$|u(x,t)| \leqslant Ce^{-6t}, \quad C>0 \text{ 为常数}.$$

**4.25** 设 $u(x,t) \in C^2(Q) \cap C^1(\overline{Q})$ 是 $Q := Q^\infty_{(0,1)}$ 中边值问题

$$u_t = u_{xx}, \quad u_x\big|_{x=0} = 1, \quad u_x\big|_{x=1} = -1, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x) \in C_0^\infty((0,1))$$

的解. 这个解在 $Q$ 上有界吗? (即温度是否升高?)

**4.26** 设 $u(x,t)$ 是 $Q:=Q_{(0,1)}^{\infty}$ 中问题

$$u_t=u_{xx},\quad u\big|_{x=0}=f(t),\quad u\big|_{x=1}=g(t),\quad u\big|_{t=0}=\varphi(x)$$

的解, $f,g,\varphi$ 是光滑函数, 并且

$$f(t)\to a\quad \text{当 } t\to\infty,\quad g(t)\to b\quad \text{当 } t\to\infty.$$

在空间 $C[0,1]$ 中, 这个问题解 $u(x,t)$ 当 $t\to\infty$ 时的极限 (如果它一般地说存在的话) 是什么?

## 4.2 柯西问题

定义在带形 $\Pi_T=\{(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}\big|x\in\mathbb{R}^n,\ 0<t\leqslant T\}$ 中, 满足方程

$$u_t=a^2\Delta_x u+f(x,t)\quad (a>0),\quad (x,t)\in\Pi_T$$

及边界条件

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x)\in C_{\rm b}(\mathbb{R}^n)$$

的函数 $u\in C_{x,t}^{2,1}(\Pi_T)\cap C(\overline{\Pi}_T)$ 称为热传导方程柯西问题的古典解, 其中 $\varphi(x),f(x,t)$ 是已知的连续有界函数.

在有界函数类中柯西问题的解存在、唯一并且可由泊松积分表示:

$$u(x,t)=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\left[-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2t}\right]\varphi(\xi)d\xi$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(2a\sqrt{\pi(t-\tau)})^n}\exp\left[-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}\right]f(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

**附注** 设 $u(x,t)$ 是柯西问题

$$\begin{cases}u_t=\Delta u, & \text{在 } \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+ \text{ 中},\\ u\big|_{t=0}=\varphi_1(x_1)\cdots\varphi_n(x_n), & x\in\mathbb{R}^n\end{cases}$$

的解, 其中 $\varphi_k(x_k)\in C_{\rm b}(\mathbb{R}),k=1,\cdots,n$. 那么 $u(x,t)=\prod\limits_{k=1}^n u_k(x,t)$, 这里 $u_k(x,t)$ 是柯西问题

$$\begin{cases}(u_k)_t=(u_k)_{xx}, & \text{在 } \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \text{ 中},\\ u_k\big|_{t=0}=\varphi_k(x), & x\in\mathbb{R},\ k=1,\cdots,n\end{cases}$$

的解.

在带形中对于热传导方程的有界解, 成立如下的极值原理:

如果函数 $u(x,t) \in C^2(\Pi_T) \cap C_b(\overline{\Pi}_T)$ 在带形 $\Pi_T$ 中满足齐次热传导方程 $u_t = a^2 u_{xx}$, 那么

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^n} u(x,0) \leqslant u(x,t) \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^n} u(x,0), \quad \forall (x,t) \in \overline{\Pi}_T.$$

对于热传导方程的有界解成立如下的关于定常性的定理:

设 $u(x,t)$ 是柯西问题

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & \text{在 } \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \text{ 中}, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), & x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) \in C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}) \end{cases}$$

的有界解. 那么

1. 如果 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \varphi(x) = A_\pm$, 那么 $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t) = \dfrac{A_+ + A_-}{2}$.

2. 如果 $\lim\limits_{l\to\pm\infty} \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} \varphi(x)dx = A$, 那么 $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t) = \dfrac{A}{2}$.

3. 如果 $\varphi(x)$ 是周期函数, 那么 $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t) = \varphi_0$, 其中 $\varphi_0$ 是函数 $\varphi(x)$ 展开为傅里叶级数的零系数, 即函数 $\varphi(x)$ 的空间平均.

## 习题

**4.27** 在带形中对热传导方程成立的极值原理, 对同样形状区域中的方程 $u_t + \Delta_x u = 0$ 是否成立?

**4.28** 证明: 对于方程 $u_t = u_{xx}$ 的柯西问题, 如果初始函数 $u(x,0)$ 是奇函数, 那么其解 $u(x,t)$ 也是关于 $x$ 的奇函数.

**4.29** 如果对 $\varphi(x)$ 的有界性的要求代之以假设

$$|\varphi(x)| \leqslant Me^{Kx^2}, \quad M>0,\ K>0,$$

那么对哪些 $t>0$, 在给出柯西问题

$$u_t = u_{xx}, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x)$$

解的公式中的积分是存在的?

**4.30** (利用泊松积分) 证明: 在 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ 中存在下述问题的解 $u(x,t) \in C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)$ :

$$u_t = u_{xx}, \quad \text{在 } L_2(\mathbb{R}) \text{ 中当 } t\to+\infty \text{ 时} \quad u(x,t) \to \varphi(x),$$

其中 $\varphi(x)$ 是 $L_2(\mathbb{R}_x)$ 中的已知函数. (不一定连续!)

**4.31**　具有下述性质的函数 $u(x,t)$ 是否唯一: $u\in C^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}\times(0,h])$;

$$u_t=u_{xx},\quad (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,h];$$
$$\lim_{t\to 0}u(x,t)=0,\quad \forall x\in\mathbb{R};\quad \sup_{x\in\mathbb{R}}|u(x,t)|<+\infty,\quad \forall t\in(0,h]?$$

**4.32**　设 $\overline{G}=\{(x,t)|x\in\mathbb{R},t\in\overline{\mathbb{R}}_-\}$. 求所有属于 $C^{2,1}_{x,t}(\overline{G})$、在 $\overline{G}$ 中有界且在 $\overline{G}$ 中满足方程 $u_t=u_{xx}$ 的函数 $u(x,t)$.

**4.33**　设 $u(x,t)$ 是 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ 中柯西问题

$$u_t=4u_{xx},\quad u\big|_{t=0}=\frac{x^2+\sin x}{1+2x^2}$$

的解. 求 $\lim\limits_{t\to+\infty}u(x,t)$.

**4.34**　设 $u(x,t)$ 是 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ 中柯西问题

$$u_t=u_{xx},\quad u\big|_{t=0}=\operatorname{arccot}x$$

的解, 求 $\lim\limits_{t\to+\infty}u(x,t)$.

**4.35**　设 $u(x,t)$ 是 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ 中柯西问题

$$u_t=u_{xx},\quad u\big|_{t=0}=\varphi(x)\in C(\mathbb{R})\cap L_\infty(\mathbb{R})$$

的有界解. 如果 $\lim\limits_{l\to+\infty}\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}\varphi(x)dx=A$, 求 $\lim\limits_{t\to+\infty}u(0,t)$.

**4.36**　求 $\lim\limits_{t\to+\infty}u(x,y,t)$, 其中 $u(x,y,t)$ 是 $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}_+$ 中柯西问题

$$u_t=u_{xx}+u_{yy},\quad u\big|_{t=0}=\varphi(x,y)$$

在如下初始条件下的解:

a) $\varphi(x,y)=\dfrac{x^2}{1+2x^2}$, b) $\varphi(x,y)=\sin^2 y$, c) $\varphi(x,y)=\dfrac{(x\sin y)^2}{1+2x^2}$.

**4.37**　a) 解 $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}_+$ 中的柯西问题

$$u_t=\Delta u-3u,\quad u\big|_{t=0}=e^{-(x_1+x_2+x_3)}.$$

b) 求 $\lim\limits_{t\to+\infty}u(x,t)$.

**4.38**　设 $u(x,t)$ 是 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ 中柯西问题

$$u_t=u_{xx},\quad u\big|_{t=0}=e^{-x^2}$$

的解. 求 $\lim\limits_{t\to+\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty}u(x,t)dx$.

**4.39** 设 $u(x,t)$ 是 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ 中具有 “势” 的热传导方程柯西问题

$$u_t = u_{xx} - u, \quad u\big|_{t=0} = \sin^2 x$$

的解. 证明: 存在常数 $A$, 使得

$$\left|u(x,t) - Ae^{-t}\right| \leqslant \alpha(t)e^{-t},$$

其中当 $t\to\infty$ 时 $\alpha(t)\to 0$. 求常数 $A$.

**4.40** 设正的有界函数满足方程

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u \quad \text{在带形 } \mathbb{R}^3\times(0,1) \text{ 中}, \\ u &\equiv 0 \quad \text{在立方体 } (0,1)\times(0,1)\times(0,1)\times(0,1) \text{ 中}. \end{aligned}$$

在带形 $\mathbb{R}^3\times(0,1)$ 中 $u\equiv 0$ 是否成立?

**4.41** 设 $u\in C^2(Q_{\mathbb{R}}^T)\cap C(\overline{Q}_{\mathbb{R}}^T)$ 是在带形 $Q_{\mathbb{R}}^T$ 中柯西问题

$$u_t = u_{xx}, \quad u\big|_{t=0} = 0 \quad \text{及} \quad |u(x,t)| \leqslant C|x|$$

的解. 证明在 $Q_{\mathbb{R}}^T$ 中 $u\equiv 0$.

**4.42** 设 $\Pi := \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\diagdown\{(0,1)\}$ 是 “挖去” 一点的半平面; $u(x,t)$ 是 $\Pi$ 中热传导方程的解, 且当 $(x,t)\in\Pi$ 时 $|u(x,t)|<M$. 证明在点 $(0,1)$ 的奇性是可去的, 即可以在这点补充定义函数 $u(x,t)$, 使得它是 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ 中热传导方程的解.

**4.43** 求下述问题的解 $u(x,t)\in C(\overline{\mathbb{R}}_+\times\mathbb{R})$ :

$$u_t = u_{xx}, \quad (x,t)\in\overline{\mathbb{R}}_+\times\mathbb{R}, \quad u\big|_{x=0} = \cos 5t, \quad t\in\mathbb{R};$$
$$\sup|u(x,t)| < \infty.$$

# 第 5 章　椭圆型方程

## 5.1　调和函数

函数 $u(x,t)\in C^2(\Omega)$ 如果在 $\Omega$ 中有

$$\Delta u=0,$$

称函数 $u$ 在区域 $\Omega$ 中是**调和**函数.

**平均值定理**　如果 $u(x)$ 是在区域 $\Omega$ 中的调和函数, 那么

$$u(x_0)=\frac{1}{\left|S_R^n(x_0)\right|}\int\limits_{S_R^n(x_0)}u(x)dS,$$

$$u(x_0)=\frac{1}{\left|B_R^n(x_0)\right|}\int\limits_{B_R^n(x_0)}u(x)dx.$$

**极值原理**　设 $u(x)$ 是在 $\Omega$ 中调和的、在 $\overline{\Omega}$ 中连续的函数且 $u(x_0)=M\equiv\max\limits_{\overline{\Omega}}u$, $x_0\in\Omega$, 那么在 $\Omega$ 内 $u\equiv M$.

**刘维尔定理**　如果 $u(x)$ 是在 $\mathbb{R}^n$ 中有界的调和函数, 那么 $u\equiv$ 常数.

**关于法向导数的霍普夫 – 奥列尼克 (Hopf-Олейник) 引理**　设函数 $u(x)$ 是球 $B$ 中的调和函数, 它异于常数, $u\in C(\overline{B})$, 并设 $u(x)$ 在点 $b\in\partial B$ 取最小值 (最大值). 如果在点 $b$ 存在导数 $\dfrac{\partial u}{\partial\gamma}$, 其中 $\gamma$ 是与球的边界 $\partial B$ 在点 $b$ 的外法线方向成锐角 $\beta$ 的方向, 那么

$$\frac{\partial u}{\partial\gamma}<0\quad\left(\frac{\partial u}{\partial\gamma}>0\right).$$

**哈纳克 (Harnack) 不等式** 设 $u(x)$ 是在球 $B_R^n(0)$ 内的调和函数且 $u(x)$ 在 $\overline{B_R^n}(0)$ 上连续、非负, 那么

$$u(0)R^{n-2}\frac{R-|x|}{(R+|x|)^{n-1}} \leqslant u(x) \leqslant u(0)R^{n-2}\frac{R+|x|}{(R-|x|)^{n-1}}.$$

**关于可去奇性的定理** 如果 $u(x)$ 是 $\Omega\diagdown\{0\}$ 内的调和函数且

$$|u(x)| \leqslant \alpha(x)|\mathcal{E}_n(x)|,$$

其中当 $x \to 0$ 时 $\alpha(x) \to 0$, 而 $\mathcal{E}_n(x)$ 是拉普拉斯算子的基本解, 那么函数 $u(x)$ 可以在 0 点补充定义, 使得 $u(x)$ 在 $\Omega$ 内处处是调和的.

**关于流量的定理** 如果 $u(x)$ 是 $\Omega$ 内的调和函数, $u \in C^1(\overline{\Omega})$, 那么

$$\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = 0,$$

其中 $\nu$ 是 $\partial\Omega$ 的外法方向向量.

## 习题

**5.1** 求 $\mathbb{R}^2$ 中所有这样的调和函数 $u(x,y)$, 它使得

$$u_y(x,y) = 3xy^2 - x^3.$$

**5.2** 在 $\mathbb{R}^n$ 中求所有属于 $L_2(\mathbb{R}^n)$ 的调和函数.

**5.3** 在 $\mathbb{R}^2$ 中求所有使得

$$u_x(x,y) < u_y(x,y), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

的调和函数 $u(x,y)$

**5.4** 设 $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \big| 0 < x < 1, 0 < y < 1\}, u \in C^2(\overline{\Omega})$,

$$\Delta u = 0 \quad \text{在 } \overline{\Omega} \text{ 上}, \quad u\big|_{y=0} = u\big|_{y=1} = 0 \quad \text{当 } 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ 时}.$$

函数 $f(x) := \int\limits_0^1 u^2(x,y)dy$ 在开区间 $(0,1)$ 内部是否有拐点?

**5.5** 设 $u(x)$ 是 $B_a^n(0)$ 内的调和函数且在 $\overline{B_a^n(0)}$ 上连续, $u(0) = 0$. 试求数

$$\int\limits_{B^+} u(x)dx \quad \text{与} \quad \int\limits_{B^-} u(x)dx$$

之间的联系, 其中 $B^+=\{x\in B_a^n(0)|u(x)>0\}$, $B^-=\{x\in B_a^n(0)\big|u(x)<0\}$.

**5.6** 设 $u$ 是 $\overline{B_1^2(0)}$ 上的调和函数. 求

$$\int_0^{2\pi} u_{\rho\rho}(1,\theta)d\theta.$$

**5.7** 设 $u(x)\in C^2(B_1^2(0))\cap C(\overline{B_1^2(0)})$;

$$\begin{aligned}\Delta u(x)=0,&\quad x:=(x_1,x_2)\in B_1^2(0);\\ u(x)=x_2^2,&\quad x\in S_1^2(0),\ x_2\geqslant 0;\\ u(x)=x_2,&\quad x\in S_1^2(0),\ x_2<0.\end{aligned}$$

求 $\displaystyle\int_{B_{1/2}^2(0)} u(x)dx$.

**5.8** 设 $\Delta u(x)=1,\ x\in\overline{B_2^2(0)}\diagdown B_1^2(0)$. 那么

$$\int_{S_1^2(0)}\frac{\partial u}{\partial\rho}(\rho,\theta)ds \quad 与 \quad \int_{S_2^2(0)}\frac{\partial u}{\partial\rho}(\rho,\theta)ds$$

哪一个大些?

**5.9** 设 $\overline{\Omega}_1\subset\Omega_2$; $u_k\in C^2(\Omega_k)\cap C(\overline{\Omega}_k)$;

$$\begin{aligned}&\Delta u_k(x)=0,\quad x\in\Omega_k;\quad u_k(x)=f_k(x),\quad x\in\partial\Omega_k\quad(k=1,2);\\ &f_1(x^1)<f_2(x^2),\quad \forall x^1\in\partial\Omega_1,\quad \forall x^2\in\partial\Omega_2;\end{aligned}$$

$x^0\in\Omega_1$ 是任意一点. $u_1(x^0)$ 与 $u_2(x^0)$ 哪一个大些?

**5.10** 设 $u\in C^2(B_1^2(0))\cap C(\overline{B_1^2(0)})$;

$$u_{x_1x_1}+u_{x_1x_2}+u_{x_2x_2}=1,\quad x:=(x_1,x_2)\in B_1^2(0).$$

$u(x)$ 在 $B_1^2(0)$ 内部是否有

a) 最大值;

b) 最小值?

**5.11** 设 $u\in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$; $q\in C(\overline{\Omega})$;

$$\Delta u(x)+q(x)u(x)=0,\quad x\in\Omega;\quad M=\max_{\overline{\Omega}}u(x);\quad m=\max_{\partial\Omega}u(x).$$

如果

a) $q(x)\equiv 0$;

b) $q(x) > 0$;

c) $q(x) < 0,\ M > 0$;

d) $q(x) < 0,\ M < 0$,

是否可能 $M > m$?

**5.12** 设 $\overline{\Omega} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \big| 1 \leqslant x^2 + 2y^2 \leqslant 2\}$; $u \in C^2(\overline{\Omega})$;

$$\Delta u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \overline{\Omega};$$
$$u(x,y) = x + y, \quad x^2 + 2y^2 = 2;$$
$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial \nu} + (1-x)u(x,y) = 0, \quad x^2 + 2y^2 = 1.$$

求 $\max\limits_{\overline{\Omega}} |u(x,y)|$.

**5.13** 设 $\Omega_\infty := \mathbb{R}^3 \diagdown \overline{B_1^3(0)}$; $u_k \in C^2(\Omega_\infty) \cap C(\overline{\Omega}_\infty)$;

$$\Delta u_k(x) = 0, \quad x \in \Omega_\infty \quad (k = 1,2); \quad u_1(x) < u_2(x), \quad \forall x \in \partial\Omega_\infty.$$

由此是否可以得出 $u_1(x) < u_2(x), \quad \forall x \in \Omega_\infty$?

**5.14** 设 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$;

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega; \quad \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} = \psi(x), \quad x \in \partial\Omega.$$

证明: $\psi(x)$ 在 $\partial\Omega$ 上不少于两点变为零.

**5.15** 设 $B_+ := \{x = (x_1, x_2, x_3) \in B_1^3(0) \big| x_3 > 0\}$, 函数 $u(x)$ 在 $\overline{B}_+$ 上定义且连续, 当 $x_3 = 0$ 时函数等于零, $u(x)$ 在 $B_+$ 内是调和函数. $u(x)$ 是否可以延拓为在 $B_1^3(0)$ 内处处为调和的函数?

**5.16** a) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$; $\Omega_\infty = \mathbb{R}^2 \diagdown \overline{\Omega}$; $u \in C^2(\Omega_\infty) \cap C(\overline{\Omega}_\infty) \cap L_\infty(\Omega_\infty)$;

$$\Delta u(x) = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega_\infty.$$

证明 $\lim\limits_{|x|\to\infty}$ 存在.

b) 在 $\Omega = B_1^2(0)$ 且

$$\int_0^{2\pi} u(\cos\theta, \sin\theta)d\theta = 0$$

的情形下求这个极限.

**5.17** 设

$$Q := \left\{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \big| x_1^2 + x_2^2 < 1,\ |x_3| < 1\right\};\ L := \left\{(0,0,x_3) \middle| |x_3| < \frac{1}{2}\right\};$$

函数 $u(x)$ 在 $Q \diagdown L$ 内是调和、有界的. 证明函数 $u(x)$ 可以延拓为在 $Q$ 内处处调和的函数.

**5.18** 对于方程

$$\Delta u + u_x + u = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

在平面上有界区域 $Q$ 中, 如同拉普拉斯方程那样形式的极值原理是否成立?

**5.19** 设 $u(x)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的调和函数并且

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{u^2(x)dx}{(1+|x|)^3} < \infty.$$

在 $\mathbb{R}^3$ 中 $u(x)$ 恒等于常数正确吗?

**5.20** 在球 $B_1^3(0)$ 内是否存在这样的正的调和函数使得

$$u(0,0,0) = 1, \quad u\left(0,0,\frac{1}{2}\right) = 10?$$

**5.21** 设函数 $u(x)$ 在球 $B_1^3(0)$ 内给定, 它满足方程

$$\Delta u = \lambda u \quad (\lambda < 0 \text{ 为常数})$$

且在半径为 $\delta$ 的球 $B_\delta^3(0)$ 内 $u(x) \equiv 0$, 其中 $0 < \delta < 1$, $\delta$ 为常数. 证明在 $B_1^3(0)$ 内 $u \equiv 0$.

**5.22** 设 $K = \left\{(r,\varphi) | 0 < r < 1, 0 < \varphi < \frac{\pi}{6}\right\}$ 是圆心角为 30° 的扇形, $u(r,\varphi)$ 是 $K$ 内的调和函数, 它属于 $C^1(\overline{K})$. 证明:

$$|u(r,\varphi)| < Cr^6, \quad \text{其中 } C > 0 \text{ 为常数}.$$

**5.23** 构造一个在球 $B_1^3(0)$ 内有界的调和函数 $u(x)$, 使得 $|\nabla u|$ 在 $B_1^3(0)$ 中无界的例子.

**5.24** 设函数 $u(x), x \in \mathbb{R}^3$, 满足方程

$$\Delta u = u(x) \quad \text{在 } \mathbb{R}^3 \text{ 中}$$

及有估计

$$|u(x)| \leqslant C, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

证明在 $\mathbb{R}^3$ 中 $u \equiv 0$.

**5.25** 设 $u(x,y)$ 是 $(x,y)$ 平面上、在半带形 $\Pi = (0,1) \times \mathbb{R}_+$ 中拉普拉斯方程的解, 其中 $\mathbb{R}_+ \equiv \{y > 0\}, u \in C^2(\Pi) \cap C(\overline{\Pi})$, $u$ 满足边界条件

$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=1} = 0, \quad y > 0$$

并且当 $y \to +\infty$ 时 $u(x,y) \to 0$ 对 $x$ 一致地成立. 证明

$$|u(x,y)| \leqslant Ce^{-3.14 \cdot y}, \quad \text{其中 } C > 0 \text{ 为常数}.$$

**5.26** 设 $u(x,y)$ 是在半平面 $P=\{y>0\}$ 中的调和函数, $u\in C(\overline{P})$,

$$|u(x,y)|\leqslant M,\quad x\in\mathbb{R},\quad y\in\mathbb{R}_+\quad \text{且}\ u\big|_{y=0}=0,\quad \forall x\in\mathbb{R}^1_x,$$

其中 $M$ 是某个常数. 证明在 $P$ 中 $u\equiv 0$.

## 5.2 基本边值问题的古典提法

**格林公式**

如果 $u,v\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$, 那么

$$\int\limits_{\Omega} v\Delta u dx=\int\limits_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial\nu}dS-\int\limits_{\Omega}\nabla u\nabla v dx,$$

$$\int\limits_{\Omega}(v\Delta u-u\Delta v)dx=\int\limits_{\partial\Omega}\left(v\frac{\partial u}{\partial\nu}-u\frac{\partial v}{\partial\nu}\right)dS,\tag{5.1}$$

其中 $\vec{\nu}$ 是区域边界 $\partial\Omega$ 的外法向单位向量.

**狄利克雷内问题**

设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是有界区域, $\partial\Omega$ 是 $C^2$ 类曲面.
求函数 $u(x)\in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ 使得

$$\begin{cases}\Delta u=f(x), & x\in\Omega,\\ u\big|_{x\in\partial\Omega}=\varphi(x)\end{cases}\tag{5.2}$$

称为古典狄利克雷问题, 其中 $f(x)\in C(\Omega),\varphi(x)\in C(\partial\Omega)$ 是已知函数.
狄利克雷内问题的解是存在并且唯一的.

**诺伊曼 (Neumann) 内问题**

求函数 $u(x)\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ 使得

$$\begin{cases}\Delta u=f(x), & x\in\Omega,\\ \dfrac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{x\in\partial\Omega}=\varphi(x)\end{cases}\tag{5.3}$$

称为在有界区域 $\Omega$ 中的古典诺伊曼问题, 其中 $f(x)\in C(\Omega),\varphi(x)\in C(\partial\Omega)$ 是已知函数, $\vec{\nu}$ 是 $\partial\Omega$ 的外法向量.

诺伊曼问题 (5.3) 的可解性条件是关于 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 的等式:

$$\int\limits_{\Omega} f(x)dx=\int\limits_{\Omega}\Delta u dx=\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\nu}dS=\int\limits_{\partial\Omega}\varphi(x)dS$$

(这个等式可由格林公式 (5.1) 当 $v(x) \equiv 1$ 时推出). 问题 (5.3) 的解不是唯一的, 而是在准确到任意一个附加常数为确定的: 如果 $u_1(x)$ 与 $u_2(x)$ 是 (5.3) 的解, 那么 $u_1(x) - u_2(x) \equiv C$ ($C$ 为常数).

**狄利克雷外问题**

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是具有 $C^2$ 类边界 $\partial\Omega$ 的有界区域, $\Omega_\infty \equiv \mathbb{R}^n \diagdown \overline{\Omega}$.

求满足方程、边界条件

$$\Delta u = f(x), \quad x \in \Omega_\infty, \quad u\big|_{x \in \partial\Omega_\infty} = \varphi(x)$$

及在无穷远处条件

$$\begin{aligned} &u(x) \to 0, \qquad \text{当 } |x| \to \infty \quad (n \geqslant 3), \\ &|u(x)| \leqslant C, \quad \text{当 } |x| \to \infty \quad (n = 2), \end{aligned} \tag{5.4}$$

的函数 $u(x) \in C^2(\Omega_\infty) \cap C(\overline{\Omega}_\infty)$ 的问题称为在无界区域 $\Omega_\infty$ 中的古典狄利克雷外问题, 其中 $f(x) \in C(\Omega_\infty) \cap L_1(\Omega_\infty), \varphi(x) \in C(\partial\Omega_\infty)$ 是已知函数, $C$ 是某个常数.

狄利克雷外问题的解存在并且唯一.

**诺伊曼外问题**

求满足方程、边界条件

$$\Delta u = f(x), \quad x \in \Omega_\infty, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{x \in \partial\Omega_\infty} = \varphi(x)$$

及在无穷远处条件 (5.4) 的函数 $u(x) \in C^2(\Omega_\infty) \cap C^1(\overline{\Omega}_\infty)$ 称为在无界区域 $\Omega_\infty$ 中的古典诺伊曼外问题, 这里 $f(x) \in C(\Omega_\infty) \cap L_1(\Omega_\infty), \varphi(x) \in C(\partial\Omega)$ 是已知函数, $\vec{\nu}$ 是 $\partial\Omega_\infty$ 的外法线向量.

当 $n \geqslant 3$ 时存在诺伊曼外问题的唯一解.

当 $n = 2$ 时, 诺伊曼外问题仅当补充条件

$$\int\limits_{\Omega_\infty} f(x)dx = \int\limits_{\partial\Omega_\infty} \varphi(x)dS$$

成立时是可解的; 这个问题的解在准确到任意一个附加常数是非唯一确定的.

**平面上的边值问题**

对于圆内或环内的拉普拉斯方程 $\Delta u = 0$, 如果变到极坐标:

$$\Delta u(\rho, \theta) = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0,$$

并应用分离变量法, 可以得到其边值问题的解. 拉普拉斯方程的通解具有如下形式:

$$u(\rho,\theta)=A_0+B_0\ln\rho+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\rho^n+\frac{B_n}{\rho^n}\right)\cos n\theta$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\rho^n+\frac{D_n}{\rho^n}\right)\sin n\theta.$$

这样的函数 $u(\rho,\theta)$ 在所考虑的区域应当是有界的, 那么

—— 对于环内 $(R_1<\rho<R_2)$ 的问题, 所有的系数可能是非零的,

—— 对于圆内 $(\rho<R)$ 的问题, $B_0=B_n=D_n=0\ (n=1,2,\cdots)$,

—— 对于圆外 $(\rho>R)$ 的问题, $B_0=A_n=C_n=0\ (n=1,2,\cdots)$.

其余系数由边界条件确定. 例如, 对于狄利克雷内问题

$$\Delta u=0,\quad \rho<R;\quad u\big|_{\rho=R}=f(\theta),$$

把函数 $f(\theta)$ 按基 $\{1,\cos n\theta,\sin n\theta;\ n=1,2,\cdots\}$ 展开为傅里叶级数, 我们得到

$$A_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)d\theta,\quad A_n=\frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi}f(\theta)\cos n\theta d\theta,\quad C_n=\frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi}f(\theta)\sin n\theta d\theta.$$

**位势**

考虑区域 $\Omega$, 其边界满足如下的李雅普诺夫 (Ляпнов) 条件 (即是所谓的李雅普诺夫曲面):

1) 在边界的每一点处存在确定的法线 (切平面).

2) 存在这样的数 $d>0$, 使得在边界上任何一点 $P$ 处, 对于边界位于半径为 $d$、中心在 $P$ 的球内的部分, 平行于 $P$ 点法线的诸直线与该部分相交不多于一次.

3) 在点 $A$ 与点 $B$ 的法线所构成的角满足如下条件:

$$\widehat{n_A,n_B}<C|A-B|^\gamma,$$

其中 $|A-B|$ 是由 $A$ 到 $B$ 的距离, $0<\gamma\leqslant 1$, $C$ 为常数.

前面在 1.1 节开始处定义了函数 $\mathcal{E}_n(x)$ —— $\mathbb{R}^n$ 中拉普拉斯算子的基本解. 借助这些函数可定义不同类型的势.

**牛顿势**

$$u_1(x)=\int_\Omega \mathcal{E}_n(x-y)f(y)dy.$$

这样的势还称为空间势 $(n\geqslant 3)$ 或 (对数) 平面势 $(n=2)$.

**单层势**

$$u_2(x)=\int_{\partial\Omega}\mathcal{E}_n(x-y)q(y)dS_y.$$

**双层势**

$$u_3(x) = -\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial \mathcal{E}_n(x-y)}{\partial \nu_y} m(y) dS_y.$$

**关于三势的定理**① 任何属于 $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ 类的函数 $u(x)$ 可表示为如下的和:

$$u(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x),$$

其中 $f(y) = \Delta u(y), q(y) = -\dfrac{\partial u(y)}{\partial \nu}$, 而 $m(y) = -u(y)$.

**关于单层势的定理** 单层势在 $\mathbb{R}^n$ 内连续.

**关于双层势间断的定理** 存在这样的函数 $u_3^- \in C(\overline{\Omega})$ 及 $u_3^+ \in C(\overline{\mathbb{R}^n \setminus \Omega})$, 使得

1) $u_3^- = u_3$ 在 $\Omega$ 内, $u_3^+ = u_3$ 在 $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ 内,

2) $\dfrac{u_3^- + u_3^+}{2} = u_3$ 在 $\partial\Omega$ 上,

3) $u_3^+ - u_3^- = m$ 在 $\partial\Omega$ 上.

对于单层势的法向导数, 类似的断言也成立.

**关于单层势法向导数间断的定理**

$$\frac{\partial u_2(x_0)}{\partial \nu_{x_0}^+} - \frac{\partial u_2(x_0)}{\partial \nu_{x_0}^-} = q(x_0), \quad \forall x_0 \in \partial\Omega,$$

其中

$$\frac{\partial u_2(x_0)}{\partial \nu_{x_0}^{\pm}} = \lim_{t \to \pm 0} \frac{u_2(x_0 + t\nu_{x_0}) - u_2(x_0)}{t}.$$

此外,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2(x_0)}{\partial \nu_{x_0}^+} + \frac{\partial u_2(x_0)}{\partial \nu_{x_0}^-}\right) = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial \mathcal{E}_n(x_0 - y)}{\partial \nu_{x_0}} q(y) dS_y.$$

### 5.2.1 格林函数

形如

$$G(x; y) = \mathcal{E}_n(x-y) + g(x, y)$$

的函数称为区域 $\Omega$ 内第一边值问题 (狄利克雷问题) 的**格林 (Green) 函数**, 其中 $x \in \Omega, y \in \overline{\Omega}$, 而 $g(x, y)$ 对每一个固定的 $x \in \Omega$ 是如下边值问题的解:

$$\begin{cases} \Delta_y g(x, y) = 0, \quad y \in \Omega, \\ g(x, y)\big|_{y \in \partial\Omega} = -\mathcal{E}_n(x-y). \end{cases}$$

①原文为 "Теорема о трех потенциалах". —— 译者注

**定理** 格林函数具有如下性质:

- $G(x;y) = G(y;x)$ —— 互易原理;
- $G(x;y) \leqslant 0$ 对所有的 $x \in \Omega, y \in \overline{\Omega}$ 成立 —— 非正性.

狄利克雷内问题 (5.2) 的解由公式

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} G(x;y) f(y) dy + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x;y)}{\partial \nu_y} \varphi(y) dS_y$$

确定.

## 习题

**5.27** 写出在 $\overline{B_a^n(0)}$ 内给出拉普拉斯方程狄利克雷问题解的公式, 并证明由这个公式所确定的函数在 $S_a^n(0)$ 上连续.

**5.28** 是否存在这样的函数 $G(x;x^0)$, 当以条件

$$\frac{\partial G(x;x^0)}{\partial \nu} = 0, \quad \text{当 } x \in \partial\Omega$$

代替条件

$$G(x;x^0) = 0, \quad \text{当 } x \in \partial\Omega,$$

其定义不同于对区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 内狄利克雷问题的格林函数的定义?

**5.29** 对于哪些 $\alpha$, 在圆 $B_1^2(0)$ 内存在具有边界条件

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=1} = \alpha \cos^4 \theta + \alpha^2 \cos^2 \theta$$

的拉普拉斯方程诺伊曼问题的解 $u(\rho, \theta)$?

**5.30** 对哪些 $\alpha$ 与 $\beta$, 在圆环 $B_2^2(0) \diagdown \overline{B_1^2(0)}$ 内存在具有边界条件

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=1} = 1, \quad \left.\left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + \alpha u\right)\right|_{\rho=2} = \beta$$

的拉普拉斯方程边值问题的解? 在所有当解存在的情况下求出这个解.

**5.31** 在 $B_1^2(0) \diagdown \{0\}$ 中是否存在满足条件

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=1} = x - y^2$$

的调和函数 $u(x,y)$?

**5.32** 求下述问题的解 $u(x,y)$ :

$$\Delta u = 0, \ \rho > 1; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=1} = x(2y-1); \quad \inf_{\rho>1} u(x,y) = 0.$$

**5.33** a) 如下问题的解是否唯一?

$$u \in C^2(\overline{\Omega}),\ 其中\ \overline{\Omega} = \overline{B_2^3(0)} \setminus B_1^3(0);$$
$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in \overline{\Omega};$$
$$\frac{\partial u(x)}{\partial \rho} - \alpha_1 u(x) = f_1(x), \quad x \in S_1^3(0);$$
$$\frac{\partial u(x)}{\partial \rho} + \alpha_2 u(x) = f_2(x), \quad x \in S_2^3(0);$$

$\alpha_k > 0\ (k = 1, 2)$ 为常数.

b) 对 $\alpha_k < 0\ (k = 1, 2)$ 为常数考虑同样的问题.

**5.34** 求所有这样一些 $\alpha > 0$, 使得在半平面 $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ 内的拉普拉斯方程狄利克雷问题满足不等式

$$|u(x, y)| \leqslant M(1 + x + |y|)^\alpha$$

的解 $u(x, y)$ 是唯一的, 其中 $M > 0$ 为常数.

**5.35** 求所有这样一些 $\alpha > 0$, 使得在区域

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| |y| < \frac{x}{\sqrt{3}}\right\}$$

内的拉普拉斯方程狄利克雷问题满足不等式

$$|u(x, y)| \leqslant M(1 + x^2 + y^2)^\alpha$$

的解 $u(x, y)$ 唯一, 其中 $M > 0$ 为常数.

**5.36** 求展布在闭区间 $x = 0, 0 \leqslant y \leqslant 2$ 上密度等于 1 的单层对数势 $u(x, y)$ 在 $Oy$ 的负半轴上诸点处的值.

**5.37** 求 $\lim\limits_{x^2+y^2\to\infty} \int\limits_{\xi^2+\eta^2=1} (\xi^2 - 2\eta^2) \ln[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] dS.$

**5.38** 设 $\overline{B} = \overline{B_1^2(0)}$. 是否存在具有性质

$$\Delta u_i = 0 \quad 在\ \overline{B}\ 内, \quad \frac{\partial u_i}{\partial y} - u_i = 3x \quad 在\ \partial B\ 上 \quad (i = 1, 2)$$

的两个不同的函数 $u_i(x, y) \in C^2(B)$?

**5.39** a) 设 $K = \{1 < |x| < 2\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的 "环形" 区域. 如下的边值问题

$$\Delta u = 0 \quad 在\ K\ 内, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{|x|=1} = \varphi_1(x_1, x_2), \quad u\big|_{|x|=2} = \varphi_2(x_1, x_2)$$

的解 $u \in C^2(K) \cap C^1(\overline{K})$ 是否唯一? 其中 $\varphi_1$ 与 $\varphi_2$ 分别是在圆 $\{|x| = 1\}$ 与 $\{|x| = 2\}$ 上的任意连续函数.

b) 如果 $\varphi_1=\cos\theta,\varphi_2=\sin\theta$ ($\theta$ 是平面上的极角), 求 a) 小题中所提问题的解.

**5.40** a) 证明, 在带形 $\Pi=\{(x,y)|0<x<1,-\infty<y<+\infty\}$ 内的狄利克雷问题

$$\Delta u=0 \quad \text{在 } \Pi \text{ 内}, \quad u\big|_{x=0}=\varphi_1(y), \quad u\big|_{x=1}=\varphi_2(y)$$

的解不唯一, 其中 $\varphi_1,\varphi_2\in C(\mathbb{R}^1)$.

b) 上述问题加上补充条件

$$u(x,y)\to 0, \quad \text{当 } |y|\to\infty \text{ 时},$$

其解是否唯一?

**5.41** 设 $Q$ 是具有 $C^1$ 类边界 $\partial Q$ 的有界区域. 边值问题

$$\Delta u-u=1 \quad \text{在 } Q \text{ 内}, \quad \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\partial Q}=0$$

的解 $u\in C^2(Q)\cap C^1(\overline{Q})$ 在 $Q$ 内是否可能是严格正的 ($\vec{n}$ 是 $\partial Q$ 的外法线方向向量)?

**5.42** 设 $K=B_1^2(0),u(x,y)$ 是问题

$$\Delta u=x^2y, \quad u\big|_{\partial K}=0$$

的解. 求 $u(0,0)$.

**5.43** 对每一个 $\alpha\in\mathbb{R}^1$, 问题

$$\begin{gathered}\Delta u=1 \quad \text{在 } K=\{(r,\varphi)|1<r<2\} \text{ 内},\\ \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{r=1}=\sin\varphi, \left(\frac{\partial u}{\partial n}+\alpha u\right)\bigg|_{r=2}=\sin^2\varphi, \quad u\in C^2(K)\cap C^1(\overline{K})\end{gathered}$$

是否至少有一个解? ($\vec{n}$ 是圆环 $K$ 的外法线方向向量.)

**5.44** 对哪些 $a\in\mathbb{R}^1$, 边值问题

$$\Delta u+2u=x-a \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}, \quad u\big|_{\partial\Omega}=0, \quad \Omega=(0,\pi)\times(0,\pi)$$

至少有一个解?

**5.45** 设 $\Omega$ 是平面上的有界区域, $u(x)\in C^2(\Omega)$,

$$\Delta u=0 \quad \text{在 } \Omega \text{ 内},$$

$\varphi(x)$ 是 $\partial\Omega$ 上的连续函数且除去唯一的点 $x^*\in\partial\Omega$ 外对所有 $x_0\in\partial\Omega$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\Omega}} u(x)=\varphi(x_0).$$

我们称这样的函数为"除去一个边界点 $x^*$ 之外的狄利克雷问题 $\Delta u = 0, u\big|_{\partial\Omega} = \varphi(x)$ 的解". 这样的狄利克雷问题的解是否唯一?

**5.46**　设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是单位球的外部. 狄利克雷外问题

$$\Delta u(x) = 0, \quad |x| > 1, \quad u\big|_{|x|=1} = 0$$

的解 $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ 在补充条件: 当 $|x| \to +\infty$ 时

a) $\displaystyle\int\limits_{|\xi-x|<1} |u(\xi)|^2 d\xi = O(1)$, b) $\displaystyle\int\limits_{|\xi-x|<1} |u(\xi)|^2 d\xi = o(1)$

下是否唯一?

**5.47**　a) 在 $B_1^2(0)$ 内求具有边界条件

$$u\big|_{\rho=1} = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-p-1} \sin(k^q \theta)$$

的拉普拉斯方程狄利克雷问题的解 $u(\rho, \theta)$, 其中 $p$ 与 $q$ 是给定的自然数.

b) 对哪些 $p$ 与 $q$, 这个解属于空间 $H^1(B_1^2(0))$?

## 5.3　广义解

### 狄利克雷问题

考虑在区域 $\Omega$ 内古典提法的狄利克雷问题

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\ u = \varphi, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}. \end{cases} \tag{5.5}$$

设 $f \in L_2(\Omega), \varphi \in H^1(\Omega)$.

对函数 $u \in H^1(\Omega)$, 如果对任意 $v \in \mathring{H}^1(\Omega)$ 及 $u - \varphi \in \mathring{H}^1(\Omega)$

$$\int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = -\int\limits_{\Omega} f v dx,$$

称 $u$ 为边值问题 (5.5) 的广义解.

如下的极小化问题

$$\inf_{w \in H^1(\Omega),\ w-\varphi \in \mathring{H}^1(\Omega)} \left[ \int\limits_{\Omega} |\nabla w|^2 dx + 2 \int\limits_{\Omega} f w dx \right]$$

或者

$$\inf_{w \in \mathring{H}^1(\Omega)} \left[ \int\limits_{\Omega} |\nabla w|^2 dx + 2 \int\limits_{\Omega} f w dx - 2 \int\limits_{\Omega} \nabla\varphi \nabla w dx \right]$$

称为问题 (5.5) 的**变分提法**.

**诺伊曼问题**

考虑在区域 $\Omega$ 内古典提法的诺伊曼问题

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \psi, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}. \end{cases} \tag{5.6}$$

设 $f \in L_2(\Omega), \psi \in L_2(\partial\Omega)$.

对函数 $u \in H^1(\Omega)$, 如果对于任意 $v \in H^1(\Omega)$

$$\int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int\limits_{\partial\Omega} \psi v dS - \int\limits_{\Omega} f v dx,$$

函数 $u$ 称为诺伊曼问题 (5.6) 的**广义解**.

如下的极小化问题

$$\inf_{w \in H^1(\Omega)} \left[ \int\limits_{\Omega} |\nabla w|^2 dx + 2\int\limits_{\Omega} f w dx - 2\int\limits_{\partial\Omega} \psi w dS \right]$$

称为问题 (5.6) 的**变分提法**.

**第三边值问题 (傅里叶问题)**

考虑在区域 $\Omega$ 内古典提法的第三边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u = \zeta, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}. \end{cases} \tag{5.7}$$

设 $f \in L_2(\Omega), \zeta \in L_2(\partial\Omega)$.

对于函数 $u \in H^1(\Omega)$, 如果对任意 $v \in H^1(\Omega)$

$$\int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \alpha \int\limits_{\partial\Omega} u v dS = \int\limits_{\partial\Omega} \zeta v dS - \int\limits_{\Omega} f v dx,$$

函数 $u$ 称为第三边值问题 (5.7) 的**广义解**.

如下的极小化问题

$$\inf_{w \in H^1(\Omega)} \left[ \int\limits_{\Omega} |\nabla w|^2 dx + \alpha \int\limits_{\partial\Omega} w^2 dS - 2\int\limits_{\partial\Omega} \zeta w dS + 2\int\limits_{\Omega} f w dx \right]$$

称为问题 (5.7) 的**变分提法**.

**极小化**

对于泛函 $F$, 如果当 $k \to \infty$ 时 $F(u_k) \to m$, $m = \inf F(v)$, 称序列 $\{u_k\}$ 为 $F$ 的*极小化序列*.

我们注意到, 诺伊曼问题在准确到附加常数具有唯一解. 为了问题的唯一可解性, 通常假设对于解有按区域的零平均. 在这样的假定下, 问题变成唯一可解的, 在这种情况下可以应用所研究的古典提法、广义解提法或变分提法的一般模式.

如果序列 $\{u_k\}$ 是极小化序列, 那么存在这样的 $u \in H^1(\Omega)$, 使得当 $k \to \infty$ 时 $u_k \to u$ 且 $F(u) = m$.

**里茨 (Ritz) 方法**

考虑狄利克雷问题的变分提法. 设 $F(w) = \int\limits_{\Omega} |\nabla w|^2 dx + 2\int\limits_{\Omega} f w dx$. 考虑线性无关组 $\phi_1, \cdots, \phi_j, \cdots$, 它的有限线性包在 $\mathring{H}^1(\Omega)$ 中稠密.

如果 $\alpha_j$ 是线性方程组

$$\begin{cases} \alpha_1 \int\limits_{\Omega} \nabla\phi_1 \nabla\phi_1 dx + \alpha_2 \int\limits_{\Omega} \nabla\phi_2 \nabla\phi_1 dx + \cdots + \alpha_k \int\limits_{\Omega} \nabla\phi_k \nabla\phi_1 dx = -\int\limits_{\Omega} f\phi_1 dx, \\ \qquad\cdots\cdots \\ \alpha_1 \int\limits_{\Omega} \nabla\phi_1 \nabla\phi_k dx + \alpha_2 \int\limits_{\Omega} \nabla\phi_2 \nabla\phi_k dx + \cdots + \alpha_k \int\limits_{\Omega} \nabla\phi_k \nabla\phi_k = -\int\limits_{\Omega} f\phi_k dx \end{cases}$$

的解, 那么 $\{u_k\}$ 是极小化序列, 其中 $u_k = \sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_j \phi_j,\ k = 1, 2, \cdots$.

## 习题

**5.48**　设 $u \in C(\overline{B_1^2(0)})$; $u(x,y) \geqslant 0, x^2+y^2=1$; 在 $B_1^2(0)$ 内存在索伯列夫意义下的广义导数 $u_{xx}, u_{yy}$, 同时

$$u_{xx} + u_{yy} \leqslant 0 \quad 在\ B_1^2(0)\ 内几乎处处成立.$$

证明, $u(x,y) \geqslant 0,\ \forall (x,y) \in B_1^2(0)$.

**5.49**　设 $u \in C(\overline{B_1^2(0)})$; 在 $B_1^2(0)$ 内存在索伯列夫意义下的广义导数 $u_{xx}, u_{yy}$, 同时在 $B_1^2(0)$ 内几乎处处有

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

证明: $|u(x,y)| \leqslant \max\limits_{S_1^2(0)} |u|,\ \forall (x,y) \in B_1^2(0)$.

**5.50** a) 叙述对于方程

$$\Delta u = h \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}$$

带有边界条件

$$u = f \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}$$

的狄利克雷问题广义解的定义.

b) 在

$$h(x) \equiv 0, \quad f(x) = |x|^2, \quad \Omega = B_1^n(0), \quad n \geqslant 3$$

的情形求这个问题的广义解.

c) 当 $\Omega = B_1^n(0) \setminus \{0\}$ 时考虑同样的问题.

**5.51** 设 $B = B_1^4(0), \ell = \left\{x \in \mathbb{R}^4 \middle| x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, 0 < x_4 < \dfrac{1}{2}\right\}$ 是 $\mathbb{R}^4$ 中的线段, $Q = B \setminus \ell$. 求狄利克雷问题

$$\int_Q (\nabla u, \nabla v) dx = 0, \quad \forall v \in \mathring{H}^1(Q), u - \varphi(x) \in \mathring{H}^1(Q),$$

$$\varphi(x) \in C_0^\infty(B) \quad \text{及} \quad \varphi(x) = 1 \quad \text{当 } x \in \ell$$

的广义解 $u(x)$.

**5.52** 在集合 $\{w \in H^1(B_1^2(0)) \big| w - f \in \mathring{H}^1(B_1^2(0))\}$ 上求

$$\inf \int_{B_1^2(0)} \left|\operatorname{grad} w(x)\right|^2 dx,$$

其中 $f(x_1, x_2) = x_2^2$.

**5.53** 如果 $\Omega = \{x = (x_1, x_2) \big| 1 < |x| < 2\}$, 计算

$$\inf_{w - (|x| - 1) \in \mathring{H}^1(\Omega)} \int_\Omega (|\nabla w|^2 - 2w) dx.$$

**5.54** 如果 $\Omega = B_1^2(0)$, 计算

$$\inf_{w - x_1 \in \mathring{H}^1(\Omega)} \int_\Omega (|\nabla w|^2 + 2(x_1^2 - x_2)w) dx.$$

# 第 6 章　个别习题的解答

---

**习题 1.5**　求算子

$$\mathcal{L}u(x,y) = u_{xx}(x,y) - u_{yy}(x,y)$$

当 $y<0$ 时变为零的基本解.

**解**　首先作变量变换 $\left(\text{旋转 } \frac{\pi}{4}\right)$

$$z = \frac{x-y}{\sqrt{2}}, \quad w = \frac{x+y}{\sqrt{2}},$$

(在广义函数中) 解方程

$$\mathcal{L}\mathcal{E}(x,y) = \mathcal{E}_{xx} - \mathcal{E}_{yy} = \delta(x,y).$$

那么以下述方式逐一重新计算诸导数:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial w}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial w}\right), \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 2\frac{\partial^2}{\partial z \partial w}.$$

在正交变换下, $\delta$ 函数仍为 $\delta$ 函数, 方程在新的坐标下具有如下形式:

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial w}\mathcal{E}(z,w) = \frac{1}{2}\delta(z,w) = \frac{1}{2}\delta(z)\cdot\delta(w).$$

先将 $w$ 固定, 对变量 $z$ 积分, 然后再固定 $z$, 对变量 $w$ 积分, 得到

$$\frac{\partial}{\partial w}\mathcal{E}(z,w) = \frac{1}{2}(\Theta(z) + C_1)\delta(w),$$
$$\mathcal{E}(z,w) = \frac{1}{2}(\Theta(z) + C_1)(\Theta(w) + C_2).$$

现在需要在所有求得的基本解中选取那个 (或那些) 当 $y<0$ 时变为零的. 我们发现, 广义函数 $\mathcal{E}(z,w)$ 是正则的, 在 I, II, III 及 IV 象限中 (对于坐标 $(z,w)$ 而言的) 分别等于 $(C_1+1)(C_2+1)/2$, $(C_1+1)C_2/2, C_1(C_2+1)/2$ 及 $C_1C_2/2$ 的分块常数. 半平面 $y<0$ 穿过这四个象限中的三个 (除去第 II 象限). 按照条件, 在那里 $\mathcal{E}(z,w)=0$, 即

$$(C_1+1)(C_2+1)/2 = C_1(C_2+1)/2 = C_1C_2/2 = 0 \Longleftrightarrow C_1 = 0, C_2 = -1.$$

于是所求解是唯一的并且具有如下形状:

$$\mathcal{E}(z,w) = \frac{1}{2}\Theta(z)(\Theta(w)-1) = -\frac{1}{2}\Theta(z)\Theta(-w).$$

变回原先的坐标系, 有

$$\mathcal{E}(x,y) = -\frac{1}{2}\Theta\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)\Theta\left(\frac{-x-y}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}\Theta(x-y)\Theta(-x-y).$$

两个 $\Theta$ 函数的乘积, 除在集合

$$x-y>0, \quad -x-y>0 \Longleftrightarrow y<x<-y \Longleftrightarrow |x|<y$$

之外处处为零, 在上述集合内等于 1. 于是答案可记为

$$\mathcal{E}(x,y) = -\frac{1}{2}\Theta(y-|x|).$$

**习题 1.12**　对哪些 $\alpha$, 函数 $u(x,y) = \left|\ln(x^2+y^2)\right|^\alpha$ 属于空间 $H^1(\Omega)$, 如果

a) $\Omega = B^2_{1/2}(0)$;

b) $\Omega = B^2_2(0)\diagdown\overline{B^2_{1/2}(0)}$?

**解**　a) 函数 $u = \left|\ln(x^2+y^2)\right|^\alpha = |2\ln r|^\alpha$, 其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$, 在区域 $\Omega = B^2_{1/2}(0)$ 中仅在坐标原点具有奇性. 这个函数对任意 $\alpha$ 属于空间 $L_2(\Omega)$, 因为

$$\int\limits_\Omega \left|\ln(x^2+y^2)\right|^{2\alpha}dxdy = 2\pi\int\limits_0^{\frac{1}{2}}|2\ln r|^{2\alpha}rdr < +\infty,$$

这是由于当 $r\to+0$ 时 $|\ln r|^{2\alpha}r\to 0$.

其次有:

$$\nabla u = \alpha|2\ln r|^{\alpha-1}\frac{2}{r}\nabla r, \quad |\nabla u| = C\frac{|\ln r|^{\alpha-1}}{r}.$$

PDG

如果如下积分收敛, 那么函数 $u \in H^1(\Omega)$ :

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 dxdy = 2\pi C^2 \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{|\ln r|^{\alpha-1}}{r}\right)^2 rdr$$

$$= 2\pi C^2 \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{|\ln r|^{2(\alpha-1)}}{r} dr \quad (\text{作变量变换 } s = -\ln r)$$

$$= 2\pi C^2 \int\limits_{\ln 2}^{+\infty} s^{2(\alpha-1)} ds.$$

上述积分当 $2(\alpha-1) < -1$, 即 $\alpha < \dfrac{1}{2}$ 时收敛. (严格地说, $\alpha = 0$ 的情形, 即当 $C = 0$ 时, 要单独考虑.)

b) 在区域 $\Omega = B_2^2(0) \diagdown \overline{B_{1/2}^2(0)}$ 中, 对函数 $u = |2\ln r|^\alpha$ 及其导数, 它们的奇性仅可能在集合 $r = 1$ 上, 在这些地方对数变为零.

因为当 $r \to 1$ 时, $\ln r = \ln(1 + (r-1)) \sim r - 1$, 那么积分

$$\int\limits_{\Omega} |\ln(x^2+y^2)|^{2\alpha} dxdy = 2\pi \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} |2\ln r|^{2\alpha} rdr$$

收敛当且仅当

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} |r-1|^{2\alpha} rdr < +\infty,$$

即当 $\alpha > -\dfrac{1}{2}$ 时. 在这种情形 $u \in L_2(\Omega)$.

我们来考察, 当

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 dxdy = 2\pi C^2 \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{|\ln r|^{2(\alpha-1)}}{r} dr < +\infty$$

成立时. 被积函数当 $r \to 1$ 时等价于 $|r-1|^{2(\alpha-1)}$, 所以积分当且仅当

$$2(\alpha-1) > -1, \quad \text{即 } \alpha > \frac{1}{2}$$

时收敛. (这次要单独考虑 $\alpha = 0$, 这个不等式不成立的情形, 但在答案中应加入这一情形.)

**答案**　a) $\alpha < \dfrac{1}{2}$; b) $\alpha > \dfrac{1}{2}$ 或 $\alpha = 0$.

**习题 1.15**　对哪些 $\alpha, \beta$, 函数 $f(x) = |x|^\alpha \cos\beta x$ 属于空间 $\mathring{H}^1((-1,1))$?

**解**　大家知道, $\mathring{H}^1((a,b))$ 由这样的函数 $f(x)$ 组成: $f(x) \in H^1((a,b)), f(a) = f(b) = 0$ (参看习题 1.11). 因为 $H^1((a,b))$ 中函数连续, 那么 $\mathring{H}^1((a,b))$ 由 $f(a) = f(b) = 0$ 的、在 $(a,b)$ 上连续的函数组成, 对这样一些函数, 其 $H^1$ 范数是有限的.

1) 对 $\alpha \geqslant 0, f(x)$ 在 $(0,1)$ 上连续.

2) 由在 $\beta$ 上使得 $f(\pm 1) = 0$ 的条件看出:

$$\beta = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

3) 在开区间 $(-1,1)$ 中每一点 $x_0$ 的邻域中, 可能除去 $x_0 = 0$ 的情形, $f(x)$ 是连续可微的, 所以它的 $H^1$ 范数在每一个这样的点的邻域是有限的. 余下要研究的是 $x_0 = 0$ 的点及端点.

因为当 $x \to 0$ 时 $f(x) \sim |x|^\alpha$, 如果积分 $\int\limits_0^\delta |x|^{2\alpha} dx$ 与 $\int\limits_0^\delta |x|^{2\alpha-2} dx$ 收敛, 那么 $f(x) \in H^1((-\delta,\delta)), \delta > 0, \delta \ll 1$, 因此当 $\alpha > \dfrac{1}{2}$ 成立.

其次, 当 $x \to 1 - 0$ 时, 函数 $f(x) \sim \cos\beta x$. 作代换 $z = 1 - x$. 那么当 $x \to 1 - 0$ 时 $(z \to 0 + 0)$, 考虑到所求得的 $\beta$ 值, 有:

$$\begin{aligned} f(z) &= \cos(-\beta z + \beta) = \cos\beta z \cos\beta + \sin\beta z \sin\beta \\ &= (-1)^k \sin\left[\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) z\right] \sim C_k z, \quad C_k = (-1)^k \left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right). \end{aligned}$$

于是, 如果 $f(z) \in H^1((0,\delta))$, 即积分 $C_k^2 \int\limits_0^\delta z^2 dz$ 及 $C_k^2 \int\limits_0^\delta dz$ 收敛, 则 $f(x) \in H^1((1-\delta,1)), \delta > 0, \delta \ll 1$. 它们的收敛性对所有的 $k$ 值成立.

总括起来, 得出: 当

$$\alpha > \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{\pi}{2}(1 + 2k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

时 $f(x) \in \mathring{H}^1((-1,1))$.

**习题 1.19**　设 $Q = B_1^3(0)$. 如下断言是否成立: 存在常数 $C > 0$, 使得

$$|u(0)| \leqslant C\|u\|_{H^1(Q)}, \quad \forall u(x) \in C^\infty(\overline{Q})?$$

**解**　断言不正确. 设 $u(x)$ 是 $C_0^\infty(Q)$ 中的任意函数, 它在坐标原点不等于 0, 在 $Q$ 之外有零延拓. 于是, $u \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, 当 $|x| \geqslant 1$ 时 $u(x) = 0, u(0) \neq 0$.

考虑函数序列 $u_n(x) = u(nx)$. 我们有 $u_n(x) \in C^\infty(Q)$, 当 $|x| \geqslant \dfrac{1}{n}$ 时 $u_n(x) = 0, u_n(0) = u(0), \nabla u_n(x) = n\nabla u(nx)$. 由弗里德里希斯不等式对函数 $u_n(x) \in C_0^\infty(Q)$

有

$$\|u_n\|^2_{H^1(Q)} = \int\limits_Q (|u_n(x)|^2 + |\nabla u_n(x)|^2)dx$$
$$\leqslant (C(Q)+1)\int\limits_Q |\nabla u_n(x)|^2 dx$$
$$= (C(Q)+1)n^2 \int\limits_{|x|<1/n} |\nabla u(nx)|^2 dx.$$

作变量变换 $y = nx, dx = dy/n^3$ (因为空间维数等于 3):

$$\|u_n\|^2_{H^1(Q)} \leqslant \frac{C(Q)+1}{n} \int\limits_{|y|<1} |\nabla u(y)|^2 dy \leqslant \frac{C(Q)+1}{n} \|u\|^2_{H^1(Q)}.$$

于是, 构造了这样一个函数序列 $\{u_n\}, u_n \in C^\infty(\overline{Q})$, 对它们来说, 在零点的值是不等零的常数, 同时, 当 $n \to \infty$ 时 $\|u_n\|_{H^1(Q)} \to 0$. 因此, 对任何常数 $C > 0$, 我们不能断言, 对所有的函数 $u \in C^\infty(\overline{Q})$ 成立 $|u(0)| \leqslant C\|u\|_{H^1(Q)}$.

**习题 2.8** a) 依据于实参数 $\alpha$, 确定如下方程的类型:

$$u_{xx} - 2\alpha u_{xy} - 3\alpha^2 u_{yy} + \alpha u_y + u_x = 0. \tag{2.2}$$

b) 化方程 (2.2) 为标准形式.

c) 求这个方程的通解.

**解** a) $D = 4\alpha^2$. 当 $\alpha \neq 0$ 时是双曲型方程, 当 $\alpha = 0$ 时是抛物型方程.

b) 如果 $\alpha \neq 0$. 特征: $\xi = y + 3\alpha x, \eta = y - \alpha x$. 标准形式: $16\alpha^2 u_{\xi\eta} - 4\alpha u_\xi = 0$. 如果 $\alpha = 0$, 那么 $u_{xx} + u_x = 0$.

c) 如果 $\alpha \neq 0$. 标准形式: $16\alpha^2 u_{\xi\eta} - 4\alpha u_\xi = 0$. 对 $\xi$ 取积分. 我们有 $4\alpha u_\eta + u = C(\eta)$. 继之对 $\eta$ 取积分且对 $\xi, \eta$ 的表达式作代换. 得到

$$u(x,y) = F(y + 3\alpha x)e^{\frac{y-\alpha x}{4\alpha}} + G(y - \alpha x).$$

如果 $\alpha = 0$, 那么

$$u(x,y) = F(y) + G(y)e^{-x}.$$

**习题 2.10** 设 $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + (y-2l)^2 < l^2\}$, 函数 $u \in C^2(\Omega)$ 在区域 $\Omega$ 内满足方程

$$2u_{xx} + \frac{\operatorname{sign} y}{2} u_{yy} = 0.$$

a) 在 $l > 0$ 的情形是否可能 $u \notin C^3(\Omega)$? 回答说明理由.

b) 在 $l < 0$ 的情形讨论同样的问题.

**解**　a) 当 $l>0$ 时, 以 $l$ 为半径、圆心在 $(0,2l)$ 的圆 $\Omega$ 位于半平面 $y>0$, 在上半平面, 方程是椭圆型的, 作变量变换 $(z,w)=(x/\sqrt{2},y\sqrt{2})$, 把方程变为拉普拉斯方程 $u_{zz}+u_{ww}=0$. 于是函数 $u(z,w)$ 是调和函数, 因此无论是作为变量 $(z,w)$ 的函数, 还是作为 $(x,y)$ 的函数, $u$ 都是无穷次可微的. 答案: 不可能.

b) 如果 $l<0$, 那么圆 $\Omega$ 位于半平面 $y<0$, 在这个半平面, 方程是双曲型的, 它是弦振动方程

$$u_{yy}=4u_{xx}.$$

比如 $u(y,x)=f(y-2x)$ 或 $u(y,x)=f(y+2x)$ 可能是解 $u\in C^2(\Omega)\setminus C^3(\Omega)$ 的例子, 这里一元函数 $f(\xi)$ 在点 $\xi=2l$ 的邻域内是 $C^2$ 类而不是 $C^3$ 类的. 比如说 $f(\xi)=|\xi-2l|^3$.

**习题 2.11**　在平面 $(t,x)\in\mathbb{R}^2$ 上考虑方程

$$u_t-u_x=0, \tag{2.4}$$

$$2u_{tt}-(\alpha+1)^2u_{tx}+2\alpha u_{xx}=0. \tag{2.5}$$

a) 求方程 (2.4) 的特征.

b) 对哪些 $\alpha$, 方程 (2.4) 的任何无穷次可微的解 $u(t,x)$ 也是方程 (2.5) 的解?

对于 b) 小题中求出的参数 $\alpha$ 的每一个值:

c) 求方程 (2.5) 的特征.

d) 指出方程 (2.5) 的某个解 $u(t,x)$, 但它不是方程 (2.4) 的解, 或者证明这样的解不存在.

e) 对有界解讨论与 d) 同样的问题.

**解**　a) 求方程 (2.4) 的特征:

$$dx+dt=0\iff x+t=C\quad (C\ \text{为常数}).$$

方程 (2.4) 的通解具有形状 $u(t,x)=f(x+t)$, 其中 $f(\xi)$ 是任意一个光滑的一元函数.

b) 将方程 (2.4) 的通解代入方程 (2.5): $u_{tt}=u_{tx}=u_{xx}=f''(x+t)$,

$$[2-(\alpha+1)^2+2\alpha]f''(x+t)=0.$$

方程 (2.5) 应对于任意无穷次可微函数 $f(x+t)$ 成立, 因此,

$$2-(\alpha+1)^2+2\alpha=0\iff\alpha=\pm1.$$

**1.** $\alpha = 1$ **的情形**

c) 当 $\alpha = 1$, 方程 (2.5) 的形状为 $u_{tt} - 2u_{tx} + u_{xx} = 0$. 其特征是直线

$$dx^2 + 2dxdt + dt^2 = 0 \Longleftrightarrow \frac{dx}{dt} = -1 \Longleftrightarrow x + t = C, \quad C \text{ 为常数}.$$

d) 方程 (2.5) 具有一族特征, 因此这个方程是抛物型的. 应用变量变换 $\xi = x + t, \eta = t$, 方程可以化为标准形状

$$u_{\eta\eta} = 0. \tag{2.5$'$}$$

函数 $u(\xi,\eta) = f(\xi) + \eta g(\xi)$ 是方程 (2.5′) 的通解, 于是, 函数 $u(t,x) = f(x+t) + tg(x+t)$ 是方程 (2.5) 的通解. 例如, 函数 $u(t,x) = t(x+t)$ 是方程 (2.5) 的解, 但它不是方程 (2.4) 的解.

e) 仅当 $g(x+t) \equiv 0$, 且 $f(x+t)$ 有界, 函数 $u(t,x) = f(x+t) + tg(x+t)$ 是有界的. 因此, 方程 (2.5) 的任何有界解是方程 (2.4) 的解.

**2.** $\alpha = -1$ **的情形**

c) 当 $\alpha = -1$, 方程 (2.5) 具有形状 $u_{tt} - u_{xx} = 0$. 它的特征是直线

$$dx^2 - dt^2 = 0 \Longleftrightarrow \frac{dx}{dt} = \pm 1 \Longleftrightarrow x \pm t = C, \quad C \text{ 为常数}.$$

d) 方程 (2.5) 有两族特征, 因此这个方程是双曲型的. 应用变量变换 $\xi = x+t, \eta = x - t$, 方程化为标准形状

$$u_{\xi\eta} = 0. \tag{2.5$''$}$$

$u(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta)$ 是方程 (2.5″) 的通解, 于是 $u(t,x) = f(x+t) + g(x-t)$ 是方程 (2.5) 的通解. 函数 $u(x,t) = x - t$ 是方程 (2.5) 的解, 但不是方程 (2.4) 的解.

e) 函数 $u(x,t) = \sin(x-t)$ 是方程 (2.5) 有界解然而不是方程 (2.4) 的解的例子.

**习题 2.24**　考虑在 $\mathbb{R}^2_{x,y}$ 的带形 $\Pi = \mathbb{R}^1_x \times [0, y_0]$ 中的柯西问题

$$\begin{aligned} &\Delta u + u = 0, \quad \text{在 } \Pi \text{ 内}, \quad u \in C^2(\Pi) \cap C^1(\overline{\Pi}), \\ &u\big|_{y=0} = \varphi(x), \quad u_y\big|_{y=0} = \psi(x), \end{aligned}$$

其中 $\varphi(x), \psi(x)$ 是 $\mathbb{R}^1_x$ 上的有界连续函数. 这个问题在空间偶 $u \in E_0, \Phi \equiv (\varphi, \psi) \in E_1$ 内是否适定? 其中

$$\begin{aligned} &E_0 = C(\Pi), \quad \|u\|_{E_0} = \sup_{\overline{\Pi}} |u(x,t)|, \\ &E_1 = C(\mathbb{R}^1_x) \times C(\mathbb{R}^1_x), \quad \|\Phi\|_{E_1} = \sup_{\mathbb{R}} |\varphi(x)| + \sup_{\mathbb{R}} |\psi(x)|. \end{aligned}$$

**解**　我们来证明, 问题是不适定的. 为此, 构造一个与阿达马 (Hadamard) 的例子类似的例子. 求出方程的一个形如 $u(x,y)=X(x)Y(y)$ 的特解, 其中函数 $Y(y)$ 当 $y>0$ 时应当是无界的. 将 $u(x,y)$ 代入方程:

$$X''(x)Y(y)+X(x)Y''(y)+X(x)Y(y)=0,$$
$$\frac{Y''(y)}{Y(y)}=-\frac{X''(x)}{X(x)}-1\equiv\lambda.$$

对函数 $Y(y)$ 可得方程 $Y''(y)-\lambda Y(y)=0$, 当 $\lambda>0$ 时, 它有无界解: $Y(y)=e^{\sqrt{\lambda}y}$. 这时函数 $X(x)=A\sin(\sqrt{\lambda+1}x)+B\cos(\sqrt{\lambda+1}x)$ 是方程 $X''(x)+(\lambda+1)X(x)=0$ 的解. 取 $\lambda=n^2, n\in\mathbb{N}$, 考虑函数序列

$$u_n(x,y)=\frac{1}{n^2}e^{ny}\sin(\sqrt{n^2+1}x).$$

函数 $u_n(x,y)$ 是问题

$$\Delta u_n+u_n=0,\quad x\in\mathbb{R}^1, y\in(0,y_0),$$
$$u_n(x,0)=\varphi_n(x)=\frac{1}{n^2}\sin(\sqrt{n^2+1}x),$$
$$\frac{\partial u_n}{\partial y}(x,0)=\psi_n(x)=\frac{1}{n}\sin(\sqrt{n^2+1}x)$$

的解. 当 $n\to\infty$ 时, 初始函数序列依空间 $C(\mathbb{R}^1)$ 范数趋于零: $\max\limits_{x\in\mathbb{R}}|\varphi_n(x)|\to 0, \max\limits_{x\in\mathbb{R}}|\psi_n(x)|\to 0$, 但解序列 $u_n(x,y)$ 不趋于零. 由适定性的定义, 解对初始资料的连续依赖性条件受到破坏, 因此, 该问题是不适定的.

**习题 3.4**　举出这样的函数 $\varphi,\psi\in C^2(\mathbb{R})$ 的例子: 它们使得柯西问题

$$u_{xx}+5u_{xy}-6u_{yy}=0\quad u\big|_{y=6x}=\varphi(x),\quad u_y\big|_{y=6x}=\psi(x)$$

a) 有解. 这解是否唯一?

b) 无解.

**解**　求方程

$$u_{xx}+5u_{xy}-6u_{yy}=0$$

的特征. 我们有

$$(dy)^2-5dydx-6(dx)^2=0,\quad y+x=C_1,\quad y-6x=C_2,$$

写出方程的通解

$$u(x,y)=f(y+x)+g(y-6x),$$

其中 $f(\xi), g(\eta) \in C^2(\mathbb{R})$ 是任意一元函数. 将通解代入给定在特征之一上的初始条件

$$\begin{cases} u\big|_{y=6x} = f(7x) + g(0) = \varphi(x), \\ u_y\big|_{y=6x} = f'(7x) + g'(0) = \psi(x). \end{cases} \tag{6.1}$$

方程组 (6.1) 可解性的必要条件具有

$$\varphi'(x) = 7\psi(x) + C \quad (C \text{ 为常数})$$

的形状, 并且由方程 (6.1) 仅可求出函数 $f(\xi)$, 而函数 $g(\eta)$ 是不确定的.

a) 使得柯西问题有解的初始资料的例子:

$$\varphi(x) = 7x^2, \quad \psi(x) = 2x.$$

问题的解不唯一:

$$u(y, x) = \frac{1}{7}(x+y)^2 + g(y - 6x),$$

其中 $g(\eta) \in C^2(\mathbb{R})$ 是满足条件 $g(0) = g'(0) = 0$ 的任意函数.

b) 使得柯西问题无解的初始条件的例子:

$$\varphi(x) = x^2, \quad \psi(x) = 2x.$$

在这种情况下, 方程组 (6.1) 矛盾.

**习题 3.14**　在 $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$ 中求问题

$$u_{tt} = \Delta_x u, \quad u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = |x|^7$$

的解 $u(x, t), x = (x_1, x_2, x_3)$.

**解**　变为球面坐标. 因为问题的初始条件仅与 $|x| = r$ 有关, 那么, 由于唯一性, 解仅是 $r$ 与 $t$ 的函数.

对于仅与半径有关的函数, 在空间 $x \in \mathbb{R}^n$ 中的拉普拉斯算子具有如下形状:

$$\Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}.$$

因此, 对于函数 $u = u(r, t)$ 的问题可改写为

$$u_{tt} = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r, \quad r > 0,\ t > 0; \quad u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = r^7.$$

把方程乘以 $r$ :

$$ru_{tt} = ru_{rr} + 2u_r,$$

作代换 $v(r,t)=ru(r,t)$. 那么 $v_{tt}=ru_{tt}, v_r=ru_r+u, v_{rr}=ru_{rr}+2u_r$. 因为 $u(0,t)$ 有界, 那么 $v(0,t)=0$. 我们得到对于函数 $v(r,t)$ 的问题

$$v_{tt}=v_{rr},\quad r>0,\ t>0;\quad v\big|_{t=0}=0,\quad v_t\big|_{t=0}=r^8,\ v\big|_{r=0}=0.$$

对于半有界弦, 将初始条件在区域 $r<0$ 作奇延拓后应用达朗贝尔方法 (参看第 3.1 节的定理):

$$v(r,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_{r-t}^{r+t}\xi^8d\xi=\dfrac{1}{18}[(r+t)^9-(r-t)^9], & r\geqslant t,\\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_{t-r}^{r+t}\xi^8d\xi=\dfrac{1}{18}[(r+t)^9-(t-r)^9], & r<t.\end{cases}$$

那么

$$u(r,t)=\frac{1}{r}v(r,t)=\frac{1}{18r}[(r+t)^9-|t-r|^9],\quad r\neq 0.$$

为求 $u(0,t)$, 或者可以作为 $\lim\limits_{r\to 0}u(r,t)$ 来求, 或者可以按照基尔霍夫公式来求:

$$u(0,t)=\frac{1}{4\pi t}\int\limits_{|\xi|=t}|\xi|^7dS_\xi=\frac{t^7}{4\pi t}\int\limits_{|\xi|=t}dS_\xi=\frac{t^7}{4\pi t}\cdot 4\pi t^2=t^8.$$

**答案**

$$u(x,t)=\frac{1}{18|x|}[(|x|+t)^9-\big|t-|x|\big|^9],\quad x\neq 0;\quad u(0,t)=t^8.$$

**习题 3.27**　对哪些 $A$ 与 $\omega$ 存在 $\overline{\mathbb{R}}_+\times\overline{\mathbb{R}}_+$ 中边值问题

$$u_{tt}=u_{xx},\quad u\big|_{x=0}=\cos\omega t,\quad u\big|_{t=0}=Ae^{-x^2},\quad u_t\big|_{t=0}=0$$

的解 $u\in C^2(\overline{\mathbb{R}}_+\times\overline{\mathbb{R}}_+)$? 求出这个解.

**解**　弦振动方程的通解具有如下形状:

$$u(x,t)=f(x-t)+g(x+t).$$

当 $x>t$ 时, 解由达朗贝尔公式确定:

$$u(x,t)=f(x-t)+g(x+t)=\frac{A}{2}\left(e^{-(x-t)^2}+e^{-(x+t)^2}\right).$$

当 $x<t$ 时有

$$u(x,t)=f(x-t)+g(x+t)=f(x-t)+\frac{A}{2}e^{-(x+t)^2},$$

其中入射波 $g(\xi)$ 与 $x>t$ 时一样, 而反射波 $f(\xi),\xi<0$, 可由边界条件求出:

$$u\big|_{x=0}=f(-t)+\frac{A}{2}e^{-t^2}=\cos\omega t\iff f(\xi)=\cos\omega\xi-\frac{A}{2}e^{-\xi^2}.$$

于是当 $x<t$ 时

$$u(x,t)=\frac{A}{2}\left(e^{-(x+t)^2}-e^{-(x-t)^2}\right)+\cos\omega(x-t).$$

如果函数 $u(x,t)$ 在角特征 $x=t$ 上有二阶连续导数, 则它属于 $C^2(\overline{\mathbb{R}}_+\times\overline{\mathbb{R}}_+)$ 类. 对于这个当 $\xi\geqslant 0$ 由 $f(\xi)=Ae^{-\xi^2}/2$ 给出, 当 $\xi<0$ 由 $f(\xi)=-\dfrac{A}{2}e^{-\xi^2}+\cos\omega\xi$ 给出的函数 $f(\xi)$ 在零点处应当是 $C^2$ 类的, 即

$$\begin{aligned}
&f(+0)=f(-0)\iff\frac{A}{2}=1-\frac{A}{2}\iff A=1,\\
&f'(+0)=f'(-0)\quad(\text{总是成立的}),\\
&f''(+0)=f''(-0)\iff -1=1-\omega^2\iff\omega=\pm\sqrt{2},
\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}
&f'(+0)=-\xi e^{-\xi^2}\big|_{\xi=0}=0,\\
&f'(-0)=\left(\xi e^{-\xi^2}-\omega\sin\omega t\right)\big|_{\xi=0}=0,\\
&f''(+0)=\left(-e^{-\xi^2}+2\xi^2e^{-\xi^2}\right)\big|_{\xi=0}=-1,\\
&f''(-0)=\left(e^{-\xi^2}-2\xi^2e^{-\xi^2}-\omega^2\cos\omega\xi\right)\big|_{\xi=0}=1-\omega^2.
\end{aligned}$$

对于所求得的 $A$ 与 $\omega$, 我们得到问题的两次连续可微解:

$$u(t,x)=\begin{cases}\left(e^{-(x+t)^2}+e^{-(x-t)^2}\right)/2, & x\geqslant t,\\ \left(e^{-(x+t)^2}-e^{-(x-t)^2}\right)/2+\cos(\sqrt{2}(x-t)), & x<t.\end{cases}$$

**习题 3.33** 设 $u(x,t)$ 是在 $[0,1]\times\overline{\mathbb{R}}_+$ 中混合问题

$$u_{tt}=4u_{xx},\quad u\big|_{x=0}=u\big|_{x=1}=0,$$

$$u\big|_{t=0}=4\sin^3\pi x,\quad u_t\big|_{t=0}=30x(1-x)$$

的解.

a) 求 $f\left(\dfrac{1}{3}\right)$, 其中 $f(t)=\displaystyle\int_0^1[u_t^2(x,t)+4u_x^2(x,t)]dx$.

b) 求 $u(x,2)$.

**解**

$$\text{a) } f'(t) = \int_0^1 [2u_t(x,t)u_{tt}(x,t) + 8u_x(x,t)u_{tx}(x,t)]dx$$

$$\overset{(\text{由方程, } u_{tt}=4u_{xx})}{=\!=\!=} 8\int_0^1 [u_t(x,t)u_{xx}(x,t) + u_x(x,t)u_{tx}(x,t)]dx$$

$$\overset{(\text{按分部积分})}{=\!=\!=} 8u_t(x,t)u_x(x,t)\Big|_{x=0}^{x=1}$$

$$-8\int_0^1 u_{tx}(x,t)u_x(x,t)dx + 8\int_0^1 u_x(x,t)u_{tx}(x,t)dx = 0;$$

由边界条件代入等于零:

$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=1} = 0 \Longrightarrow u_t\big|_{x=0} = u_t\big|_{x=1} = 0.$$

因为 $f'(t) = 0$, 那么 $f(t)$ 恒等于常数, 且

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = f(0) = \int_0^1 [u_t^2(x,0) + u_x^2(x,0)]dx.$$

为了求 $u_x(x,0)$, 对初始条件 $u(x,0) = 4\sin^3 \pi x$ 关于 $x$ 求微商, 得

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \int_0^1 [(30x(1-x))^2 + 4(12\pi \sin^2 \pi x \cos \pi x)^2]dx$$
$$= 30 + 36\pi^2.$$

b) 用傅里叶方法求问题的通解:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}[A_n \cos 2\pi nt + B_n \sin 2\pi nt] \sin \pi nx.$$

那么解 $u(x,t)$ 关于时间是以 1 为周期的, 并且

$$u(x,2) = \sum_{n=1}^{\infty}[A_n \cos 4\pi n + B_n \sin 4\pi n] \sin \pi nx$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \pi nx = u(x,0) = 4\sin^3 \pi x.$$

PDG

**习题 3.39**

a) 求出所有这样的 $k>0$, 对这些 $k$, 对某个函数 $\varphi(x)\in C^\infty((0,\pi))$, 在 $[0,\pi]\times\mathbb{R}_+$ 中存在问题

$$u_{tt}=9u_{xx},\quad u\big|_{x=0}=(u_x-ku)\big|_{x=\pi}=0,\quad u\big|_{t=0}=0,\quad u_t\big|_{t=0}=\varphi(x)$$

的无界解.

b) 对 $k=1$ 指出所有使得上述问题的解 $u(x,t)$ 有界的函数 $\varphi(x)\in C^\infty((0,\pi))$.

**解** a) 分离变量, 得到问题的解的级数形式:

$$u(t,x)=\sum_{j=1}^{\infty}T_j(t)X_j(x),$$

其中函数系 $X_j(x)\not\equiv 0$ 是斯图姆 – 刘维尔问题

$$X_j''(x)=\lambda_jX_j(x),\quad X_j(0)=0,\quad X_j'(\pi)-kX_j(\pi)=0 \tag{6.2}$$

的解, 而函数 $T_j(t)$ 是问题

$$T_j''(t)=9\lambda_jT_j(t),\quad T_j(0)=0,\quad T_j'(0)=\int_0^\pi\varphi(x)X_j(x)dx\bigg/\int_0^\pi X_j^2(x)dx \tag{6.3}$$

的解.

问题 (6.3) 的诸解仅在 $\lambda_j\geqslant 0$ 可能关于 $t$ 是增长的, 并且只要 $T_j'(0)\neq 0$, 它们必定是增长的. 于是, 必须弄明白, 什么时候斯图姆 – 刘维尔问题 (6.2) 有非负的本征值 $\lambda_j$.

$\lambda_j=0$ 时, 准确到常数因子, 问题 (6.2) 的非零解 $X_j(x)$ 具有形状 $X_j(x)=x$ (作为线性函数在零处具有零值) 且仅在点 $\pi$ 这个函数满足边界条件的情况下, 即

$$1-k\pi=0\iff k=\frac{1}{\pi}$$

时存在.

在 $\lambda_j=\omega^2>0,\omega>0$ 的情形, 由于条件 $X_j(0)=0$, 这个解具有 $X_j(x)=\operatorname{sh}\omega x$ 的形状 (还是准确到常数因子), 这个解在关于 $\omega$ 的下述方程有解的情况下存在:

$$\omega\operatorname{ch}\omega\pi-k\operatorname{sh}\omega\pi=0\iff k\operatorname{th}\omega\pi=\omega, \tag{6.4}$$

同样地, 在函数 $f(\omega)=k\operatorname{th}\omega\pi$ 在点 $O$ 处的导数大于 1, 即 $k\pi>1$ 时解存在. 我们看出, 由于函数 $f(\omega)$ 在正半轴是严格上凸的, 方程 (6.4) 有不多于一个的解 $\omega>0$.

因此, 当 $k\geqslant\dfrac{1}{\pi}$ 时, 所求问题的关于时间无界的解存在.

b) 如果 $k=1$, 那么如上面所指出的, 斯图姆 – 刘维尔问题 (6.2) 刚好有一个正本征值 $\lambda_1>0$, 解 $u(t,x)$ 有界当且仅当相应的本征函数 $X_1(x)$ 不出现在解的展开中, 即 $T_1'(0)=0$. 这表明

$$\int_0^\pi \varphi(x)X_1(x)dx=0.$$

**习题 4.9**　函数 $\varphi(x)\in C_0^\infty((0,1))$, 在哪些条件下在半带形 $Q_{(0,1)}^\infty$ 中问题

a) $u_t=u_{xx},\ u\big|_{x=0}=u_x\big|_{x=1}=0,\ u\big|_{t=0}=\varphi(x)$;

b) $u_t=u_{xx},\ u_x\big|_{x=0}=u_x\big|_{x=1}=0,\ u\big|_{t=0}=\varphi(x)$

的任意解 $u(x,t)$ 具有当 $t\to+\infty$ 时 $u(x,t)\to 0$ 的性质?

**解**　a) 用傅里叶方法求出问题的解

$$u(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n e^{-\pi^2\left(n+\frac12\right)^2 t}\sin\pi\left(n+\frac12\right)x,$$

其中 $\varphi_n$ 是函数 $\varphi(x)$ 按基 $\{\sin\pi\left(n+\frac12\right)x,\ n=0,1,\cdots\}$ 展开的系数. 因此, 对任意函数 $\varphi(x)\in C_0^\infty((0,1)), u(t,x)\xrightarrow[t\to\infty]{}0$.

b) 对第二类边界条件, 解具有形状:

$$u(t,x)=\varphi_0+\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n e^{-\pi^2n^2t}\cos(\pi nx),$$

其中 $\varphi_n$ 是函数 $\varphi(x)$ 按基 $\{1;\cos(\pi nx),\ n=1,2,\cdots\}$ 展开的傅里叶系数. 因此, $\lim\limits_{t\to\infty}u(t,x)=\varphi_0$, 而函数 $\varphi(x)$ 在条件

$$\int_0^1\varphi(x)dx=0$$

下其系数 $\varphi_0=0$. 从物理学的观点, 这个条件表明, 两端绝热的杆的极限温度等于初始温度的平均值. 在初始温度的平均值等于零的情形下, 久而久之杆的温度趋于零.

**习题 4.21**　设 $u(t,x)$ 是 $Q_{(0,\pi)}^\infty$ 中问题

$$u_t=u_{xx},\quad u\big|_{x=0}=u_x\big|_{x=\pi}=0,\quad u\big|_{t=0}=\varphi(x)$$

的解, 其中 $\varphi(0)=\varphi'(\pi)=0$.

a) 证明: $\sup\limits_{0<x<\pi}|u(1,x)|\leqslant\sup\limits_{0<x<\pi}|\varphi(x)|$.

b) $\sup\limits_{0<x<\pi}|u(1,x)|\leqslant\dfrac12\sup\limits_{0<x<\pi}|\varphi(x)|$ 是否成立?

**解** a) 我们把函数 $u(t,x)$ 通过点 $\pi$ 偶延拓到集合 $x\in(\pi,2\pi)$, 即当 $x\in(\pi,2\pi)$ 时令 $\widetilde{u}(x,t)=u(t,2\pi-x)$. 所构造的函数 $\widetilde{u}(t,x)$ 是边值问题

$$\widetilde{u}_t=\widetilde{u}_{xx},\quad x\in(0,2\pi),\quad t>0,$$
$$\widetilde{u}\big|_{x=0}=\widetilde{u}\big|_{x=2\pi}=0,\quad \widetilde{u}\big|_{t=0}=\widetilde{\varphi}(x)$$

的解, 其中函数 $\widetilde{\varphi}(x)$ 是函数 $\varphi(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上类似的偶延拓. 由于有界区域内热传导方程的极值原理, 解 $\widetilde{u}(t,x)$ 在 $t=0$ 按模取最大值 (因为 $\widetilde{u}$ 在边界 $x=0$ 与 $x=2\pi$ 上等于零). 于是,

$$\sup_{0<x<\pi}|u(1,x)|=\sup_{0<x<2\pi}|\widetilde{u}(1,x)|\leqslant\sup_{0<x<2\pi}|\widetilde{\varphi}(x)|=\sup_{0<x<\pi}|\varphi(x)|.$$

b) 不成立. 例子: $\varphi(x)=\sin(x/2)$; 相应的解 $u(t,x)=e^{-t/4}\sin(x/2)$, 那么

$$\sup_{0<x<\pi}|u(1,x)|=e^{-1/4},\quad \sup_{0<x<\pi}|\varphi(x)|=1,$$

$e^{-1/4}>1/2$, 因为 $e<2^4$.

**习题 4.33** 设 $u(x,t)$ 是 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ 中柯西问题

$$u_t=4u_{xx},\quad u\big|_{t=0}=\frac{x^2+\sin x}{1+2x^2}$$

的解. 求 $\lim\limits_{t\to+\infty}u(x,t)$.

**习题 4.34** 设 $u(x,t)$ 是 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ 中柯西问题

$$u_t=u_{xx},\quad u\big|_{t=0}=\operatorname{arc\,cot}x$$

的解. 求 $\lim\limits_{t\to+\infty}u(x,t)$.

**习题 4.35** 设 $u(x,t)$ 是 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ 中柯西问题

$$u_t=u_{xx},\quad u\big|_{t=0}=\varphi(x)\in C(\mathbb{R})\cap L_\infty(\mathbb{R})$$

的有界解. 如果

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}\varphi(x)dx=A,$$

求 $\lim\limits_{t\to+\infty}u(0,t)$.

**解** 习题 4.33 ~ 4.35 是基于**定常化 (стабилизация, 相当于英文 stabilization) 的定理**:

设 $u(x,t)$ 是柯西问题

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & \text{在 } \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \text{ 中}, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

的有界解, $\varphi(x) \in C(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$. 那么:

1. 如果

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = A, \quad \lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = B, \tag{6.5}$$

那么 $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t) = \dfrac{A+B}{2}$.

2. 如果

$$\lim_{l\to+\infty} \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \varphi(x)dx = A, \tag{6.6}$$

那么 $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t) = \dfrac{A}{2}$.

3. 如果 $\varphi(x)$ 是周期函数, 那么 $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t) = \varphi_0$, 其中 $\varphi_0$ 是函数 $\varphi(x)$ 展开为傅里叶级数的零阶系数, 即函数 $\varphi(x)$ 的空间平均.

**证明**

1. 将 $\varphi$ 表为其偶分量与奇分量和的形式:

$$\varphi_+ = \frac{\varphi(x)+\varphi(-x)}{2}, \quad \varphi_- = \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{2}.$$

由泊松公式得

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_+(\xi)\exp\left(-\frac{(\xi-x)^2}{4t}\right)d\xi \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_-(\xi)\exp\left(-\frac{(\xi-x)^2}{4t}\right)d\xi \quad \left(\text{令 } \eta = \frac{\xi-x}{2\sqrt{t}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_+(x+2\sqrt{t}\eta)\exp(-\eta^2)d\eta + \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_-(x+2\sqrt{t}\eta)\exp(-\eta^2)d\eta \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_+(2\sqrt{t}\eta)\exp(-\eta^2)d\eta + \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_-(2\sqrt{t}\eta)\exp(-\eta^2)d\eta \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} [\varphi_+(x+2\sqrt{t}\eta) - \varphi_+(2\sqrt{t}\eta)]\exp(-\eta^2)d\eta \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} [\varphi_-(x+2\sqrt{t}\eta) - \varphi_-(2\sqrt{t}\eta)]\exp(-\eta^2)d\eta. \end{aligned}$$

第二个积分等于零, 这是因为它是奇函数对于对称区间所取的积分. 第三与第四个积分可以用量

$$\begin{aligned}\varepsilon_\pm := &|\varphi_\pm(x+2\sqrt{t}\eta)-\varphi_\pm(2\sqrt{t}\eta)|\\ =&\left|\varphi_\pm\left(2\sqrt{t}\left[\eta+\frac{x}{2\sqrt{t}}\right]\right)-\varphi_\pm(2\sqrt{t}\eta)\right|\end{aligned}$$

按模来估计. 如果函数 $f(x)$ 连续, 那么 $\tilde{f}(x)=f(kx)$ 也是连续的, 其中 $k\neq 0$ 为一常数, 即当 $\Delta x\to 0$ 时 $\tilde{f}(x+\Delta x)\to\tilde{f}(x)$. 取 $\varphi_\pm(x)$ 中任意一个为 $f(x)$, 取量 $2\sqrt{t}$ 为 $k$, 取量 $\dfrac{x}{2\sqrt{t}}$ 为 $\Delta x$. 于是, 当 $\dfrac{x}{2\sqrt{t}}\to 0$, 即当 $t\to\infty$ 时 $\varepsilon_\pm\to 0$.①

余下的是考虑第一个积分, 它可以改写为

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\varphi(2\sqrt{t}\eta)+\varphi(-2\sqrt{t}\eta)}{2}-\frac{A+B}{2}\right]\exp(-\eta^2)d\eta+\frac{A+B}{2}.$$

由于 (6.5) 式, 当 $t\to\infty$ 时, 这个式子中的积分趋于零. 于是, 最终得到 $\lim\limits_{t\to+\infty}u(x,t)=\dfrac{A+B}{2}$.

2. 记 $F(x)=\int\limits_0^x\varphi(\xi)d\xi$. 条件 (6.6) 表明

$$\lim_{l\to\infty}\frac{F(l)-F(-l)}{l}=A. \tag{6.6*}$$

记 $F_+(x)$ 与 $F_-(x)$ 为函数 $F(x)$ 的偶分量与奇分量.

①这里的论述似有不妥: 不知取 $2\sqrt{t}$ 为 $k$, 当 $t\to\infty$ 时, 如何把 $2\sqrt{t}$ 看作常数? 其实当 $t\to\infty$ 时 $\varepsilon_\pm\to 0$ 这一点, 只要根据 $\varphi(x)$ 在 $x\to\pm\infty$ 时的渐近性质所作假设, 可把 $x$ 限定在某个有限区间之内 (因为当 $t\to+\infty$ 时在 $\lim u(x,t)$ 中 $x$ 是参变量), 再应用柯西准则即可得出. 大致叙述如下: 因为 $\varphi_\pm(X)\to\dfrac{A\pm B}{2}(X\to\infty)$, 对任给 $\varepsilon>0$ 必可找到一个正数 $M>0$, 使得当 $X_1,X_2>M$ 时有 $|\varphi_\pm(X_2)-\varphi_\pm(X_1)|<\varepsilon$. 实际上, 只要限定恒有 $|x|<M$, 那么令 $X_2=\xi>2M$ (由前述, $\xi=x+2\sqrt{t}\eta,\xi$ 充分大也就是 $t$ 充分大), 再令 $X_1=-x+\xi>2M-|x|>2M-M=M$, 这时就有

$$|\varphi_\pm(x+2\sqrt{t}\eta)-\varphi_\pm(2\sqrt{t}\eta)|<\varepsilon.$$

—— 译者注

根据泊松公式

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_+(\xi)\exp\left[-\frac{(\xi-x)^2}{4t}\right]d\xi + \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_-(\xi)\exp\left[-\frac{(\xi-x)^2}{4t}\right]d\xi \\
&= \lim_{l\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}F(\xi)\exp\left[-\frac{(\xi-x)^2}{4t}\right]\Bigg|_{\xi=-l}^{\xi=l} \\
&\quad -\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}F_+(\xi)\frac{x-\xi}{2t}\exp\left[-\frac{(\xi-x)^2}{4t}\right]d\xi \\
&\quad -\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}F_-(\xi)\frac{x-\xi}{2t}\exp\left[-\frac{(\xi-x)^2}{4t}\right]d\xi.
\end{aligned}
$$

上述三个式子分别用 $L, I_1, I_2$ 表示, 并且作变量变换 $\eta = \dfrac{\xi - x}{2\sqrt{t}}$ 来变换这些式子.

$$
\begin{aligned}
L &= \lim_{l\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}F(x+2\sqrt{t}\eta)\exp(-\eta^2)\Big|_{\eta=-l}^{\eta=l} \\
&= \lim_{l\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}[F(2\sqrt{t}l)-F(-2\sqrt{t}l)]\exp(-l^2) \\
&\quad +\lim_{l\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}[F(x+2\sqrt{t}l)-F(2\sqrt{t}l)]\exp(-l^2) \\
&\quad -\lim_{l\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}[F(x-2\sqrt{t}l)-F(-2\sqrt{t}l)]\exp(-l^2) \\
&= \lim_{l\to+\infty}\frac{Al}{\sqrt{\pi}}\exp(-l^2) + \lim_{l\to+\infty}\frac{x}{2\sqrt{\pi t}}\varphi(2\sqrt{t}l+\theta_1 x)\exp(-l^2) \\
&\quad -\lim_{l\to+\infty}\frac{x}{2\sqrt{\pi t}}\varphi(-2\sqrt{t}l-\theta_2 x)\exp(-l^2),
\end{aligned}
$$

$\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$. (这里我们利用了拉格朗日定理.) 如果忆起函数 $\varphi$ 是有界函数, 那么便得出: 对于每个固定的 $x, L = 0$. 其次

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(x+2\sqrt{t}\eta)+F(-x-2\sqrt{t}\eta)}{2}\eta\exp(-\eta^2)d\eta \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(2\sqrt{t}\eta)+F(-2\sqrt{t}\eta)}{2}\eta\exp(-\eta^2)d\eta \\
&\quad +\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(x+2\sqrt{t}\eta)-F(2\sqrt{t}\eta)}{2}\eta\exp(-\eta^2)d\eta \\
&\quad +\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(-x-2\sqrt{t}\eta)-F(-2\sqrt{t}\eta)}{2}\eta\exp(-\eta^2)d\eta.
\end{aligned}
$$

在第一个积分中, 被积函数是奇函数, 所以它等于零. 如下两个积分的绝对值, 考虑到拉格朗日定理, 可以估计为

$$\left|\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(\pm x\pm 2\sqrt{t}\eta)-F(\pm 2\sqrt{t}\eta)}{2}\eta\exp(-\eta^2)d\eta\right|$$

$$\leqslant\frac{2}{\sqrt{\pi t}}\left|\int_{0}^{\infty}\pm x\varphi(\pm 2\sqrt{t}\eta+\theta x)\eta\exp(-\eta^2)d\eta\right|$$

$$\leqslant\frac{2|x|}{\sqrt{\pi t}}\sup_{\xi\in\mathbb{R}}|\varphi(\xi)|\left(-\frac{\exp(-\eta^2)}{2}\bigg|_0^{\infty}\right)=\frac{2|x|}{\sqrt{\pi t}}\sup_{\xi\in\mathbb{R}}|\varphi(\xi)|,$$

$\theta\in(0,1)$. 于是, 由于 $\varphi$ 的有界性, 在每一个固定的点 $x$, 积分当 $t\to+\infty$ 时趋于零.

其次,

$$I_2=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(x+2\sqrt{t}\eta)-F(-x-2\sqrt{t}\eta)}{2}\eta\exp(-\eta^2)d\eta$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(2\sqrt{t}\eta)-F(-2\sqrt{t}\eta)}{2}\eta\exp(-\eta^2)d\eta$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}[F(x+2\sqrt{t}\eta)-F(2\sqrt{t}\eta)]\eta\exp(-\eta^2)d\eta$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}[F(-x-2\sqrt{t}\eta)-F(-2\sqrt{t}\eta)]\eta\exp(-\eta^2)d\eta.$$

如前面所指出的, 当 $t\to+\infty$ 时后两个积分趋于零, 而第一个积分可变为

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(2\sqrt{t}\eta)-F(-2\sqrt{t}\eta)}{2\sqrt{t}\eta}2\sqrt{t}\eta^2\exp(-\eta^2)d\eta$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{F(2\sqrt{t}\eta)-F(-2\sqrt{t}\eta)}{2\sqrt{t}\eta}-A\right)\eta^2\exp(-\eta^2)d\eta$$

$$+\frac{A}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\eta^2\exp(-\eta^2)d\eta.$$

第二项等于 $\dfrac{A}{2}$, 这是因为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\eta^2\exp(-\eta^2)d\eta=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

而第一项可按绝对值估计为

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{F(2\sqrt{t}\eta)-F(-2\sqrt{t}\eta)}{2\sqrt{t}\eta}-A\right)\eta^2\exp(-\eta^2)d\eta\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\sup_{\eta\in\mathbb{R}}\left|\frac{F(2\sqrt{t}\eta)-F(-2\sqrt{t}\eta)}{2\sqrt{t}\eta}-A\right|.$$

但是, 由于条件 (6.6*), 当 $t\to+\infty$ 时最末的式子趋于零. 合并所有的估计, 我们得出, 当 $t\to+\infty$ 时, $u(x,t)\to\dfrac{A}{2}$.

3. 以 $2l$ 表示函数 $\varphi(x)$ 的周期, 那么

$$\varphi(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\exp\left[\frac{ik\pi x}{l}\right].$$

由于 $\varphi(x)$ 的连续性, 级数一致收敛,① 可以对其逐项取积分.

根据泊松公式, 可把柯西问题的解表为:

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\exp\left[-\frac{(\xi-x)^2}{4t}\right]d\xi$$
$$=\frac{c_0}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(\xi-x)^2}{4t}\right]d\xi$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{ik\pi\xi}{l}\right]\exp\left[-\frac{(\xi-x)^2}{4t}\right]d\xi.$$

第一项等于 $c_0$. 我们来证明, 当 $t\to+\infty$ 时, 第二项趋于零. 实际上, 在指数函数的上标中分解出完全平方, 得

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{ik\pi\xi}{l}\right]\exp\left[-\frac{(\xi-x)^2}{4t}\right]d\xi$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{4ik\pi x}{l}-\frac{4k\pi^2t}{l^2}\right]\exp\left[-\frac{\left(\xi-\left(x+\dfrac{2ik\pi t}{l}\right)\right)^2}{4t}\right]d\xi$$

①这个结论不对. 在古典分析范围内, $\varphi(x)$ 应具有一定的光滑性, 其傅里叶级数才可能一致收敛. 至于对其是否可逐项积分是另一个问题, 应进一步讨论. —— 译者注

$$= \exp\left[\frac{4ik\pi x}{l} - \frac{4k\pi^2 t}{l^2}\right] \to 0, t \to +\infty.$$ ①

于是, $u(x,t) \to c_0 = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} \varphi(x)dx.$

①此处原文中有印刷错误, 译文中已改. 另外, 应该指出的是此处用到了

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\left(\xi - \left(x + \frac{2ik\pi t}{l}\right)\right)^2}{4t}\right) d\xi = 1$$

这一结果, 它是高斯积分 $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = 1$ 当 $x$ 为复数的一个推广. 现在说明如下: 在前一积分中作变量变换 $\zeta = \xi - x, \frac{2ik\pi t}{l} = -ib$(其中 $b = -\frac{2k\pi t}{l}$ 是常数, 而 $x$ 不是积分变量, 也看作常数), 这个积分可写为

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(\zeta + ib)^2}{4t}\right) d\zeta. \tag{*}$$

于是问题变成证明 (*) 式等于 1. 再引入复变量 $z = (\zeta + i\tau)/2\sqrt{t}$, 并考虑复平面上的回路积分

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{L} \exp(-z^2)dz,$$

其中 $L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$ 是复平面上由如下四条线段所组成的矩形回路: $L_1$ 是实轴上从 $z = -R+i0 = -R$ 到 $z = R+i0 = R$ 的线段, $L_2$ 是平行于虚轴从 $z = R = R+i0$ 到 $z = R+ib\,(b>0)$ 的线段, $L_3$ 是平行于实轴从 $g = R + ib$ 到 $z = -R + ib$ 的线段, $L_4$ 是平行于虚轴从 $z = -R + ib$ 到 $z = -R + i0$ 的线段. 因为 $\exp(-z^2)$ 在这个矩形回路内是解析的, 由柯西积分定理有

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{L_1+L_2+L_3+L_4} \exp(-z^2)dz = 0. \tag{**}$$

而在 $L_1$ 上 $z = \zeta/2\sqrt{t} = \xi, dz = d\zeta/2\sqrt{t} = d\xi$, 于是 $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{L_1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-R}^{R} \exp(-\xi^2)d\xi$, 这个积分当 $R \to \infty$ 时等于 1. 类似地, 在 $L_3$ 上的积分是

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{R}^{-R} \exp\left(-\frac{(\zeta + ib)^2}{4t}\right) d\zeta.$$

在这个积分中令 $R \to \infty$ 后正是我们要计算的积分 (*) 的反号. 至于 $\int\limits_{L_2}$ 与 $\int\limits_{L_4}$, 其被积函数有: $|\exp(-z^2)| = \exp(-\operatorname{Re} z^2) \leqslant \exp(-R^2 + b^2) \to 0$ (当 $R \to \infty$), 所以当 $R \to \infty$ 时, 这两个积分都趋于零. 于是在 (**) 式中当令 $R \to \infty$ 时得出

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(\zeta + ib)^2}{4t}\right) d\zeta = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)dx = 1.$$

—— 译者注

**习题 4.36**　求 $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,y,t)$, 其中 $u(x,y,t)$ 是 $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}_+$ 中柯西问题

$$u_t = u_{xx} + u_{yy}, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x,y)$$

在如下初始条件下的解:

a) $\varphi(x,y) = \dfrac{x^2}{1+2x^2}$, b) $\varphi(x,y) = \sin^2 y$, c) $\varphi(x,y) = \dfrac{(x\sin y)^2}{1+2x^2}$.

**解**　这里

$$\varphi(x,y) = \frac{(x\sin y)^2}{1+2x^2} = \varphi_1(x)\varphi_2(y),$$
$$\varphi_1(x) = \frac{x^2}{1+2x^2}, \quad \varphi_2(y) = \sin^2 y,$$

因此,

$$\lim_{t\to\infty} u(x,y,t) = \lim_{t\to\infty} u_1(x,t) \lim_{t\to\infty} u_2(y,t).$$

但是

$$\lim_{t\to\infty} u_1(x,t) = \frac{1}{2} \qquad (\text{定理 } 1)$$

而

$$\lim_{t\to\infty} u_2(y,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 y dy = \frac{1}{2} \qquad (\text{定理 } 3).$$

于是, $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,y,t) = \dfrac{1}{4}$.

**习题 5.3**　求所有在 $\mathbb{R}^2$ 中, 使得

$$u_x(x,y) < u_y(x,y), \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

的调和函数 $u(x,y)$.

**解**　如果 $u(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的调和函数, 那么它的导数同样是调和函数. 所以 $v = u_x - u_y$ 是在整个平面上的调和函数. 根据刘维尔定理, 它是常数. 于是 $u_x - u_y = C$.

用标准的方法解这个线性非齐次一阶偏微分方程. 特征方程为

$$dx = -dy = \frac{du}{C}.$$

这个方程组有两个独立的首次积分

$$x + y = C_1, \quad u - Cx = C_2,$$

即解具有形状 $u = Cx + \varphi(x+y)$, 其中 $\varphi$ 是任意调和函数. 于是,

$$0 = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 2\varphi''.$$

而这表明 $\varphi(x+y) = K_1(x+y) + K_2$ 或 $u(x,y) = M_1x + M_2y + M_3$. 因为 $u_x < u_y$, 所以 $M_1 < M_2$.

**习题 5.4**　设 $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \big| 0 < x < 1, 0 < y < 1\}, u \in C^2(\overline{\Omega})$,

$$\Delta u = 0 \quad \text{在 } \overline{\Omega} \text{ 中}, \quad u\big|_{y=0} = u\big|_{y=1} = 0 \quad \text{当 } 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

函数 $f(x) := \int\limits_0^1 u^2(x,y)dy$ 在开区间 $(0,1)$ 内部是否有拐点?

**解**　函数 $u^2(x,y) \in C^2(\Omega)$, 所以 $\int\limits_0^1 u^2(x,y)dy$ 可对 $x$ 求两次导数, 那么利用函数 $u$ 的调和性质, 有

$$f''(x) = 2\int\limits_0^1 (u_x^2 + uu_{xx})dy = 2\int\limits_0^1 (u_x^2 - uu_{yy})dy.$$

对第二个等号右边的第二项应用分部积分并考虑到边值条件得

$$f''(x) = 2\int\limits_0^1 (u_x^2 + u_y^2)dy \geqslant 0, \quad x \in [0,1].$$

这表示没有拐点.

**习题 5.7**　设 $u(x) \in C^2(B_1^2(0)) \cap C(\overline{B_1^2(0)})$;

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0, \quad x := (x_1, x_2) \in B_1^2(0); \\ u(x) &= x_2^2, \quad x \in S_1^2(0), \quad x_2 \geqslant 0; \\ u(x) &= x_2, \quad x \in S_1^2(0), \quad x_2 < 0. \end{aligned}$$

求 $\int\limits_{B_{1/2}^2(0)} u(x)dx$.

**解**　根据当 $n=2$ 时调和函数关于曲面的平均的定理有

$$u(0) = \frac{1}{\sigma_2 R}\int\limits_{S_R^2(0)} u(\xi)d\xi,$$

其中 $\sigma_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中单位球面的面积, $\sigma_2 = 2\pi$. 把 $u(x)$ 在圆周 $S_R^2(0)$ 上的值代入 (考虑到在此圆周的不同部分, 由不同的表达式给出), 并转到极坐标系, 得

$$u(0) = \frac{1}{2\pi}\left[\int\limits_0^\pi \sin^2\varphi d\varphi + \int\limits_\pi^{2\pi} \sin\varphi d\varphi\right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi},$$

另一方面, 根据空间平均的定理

$$u(0) = \frac{2}{\sigma_2 R^2} \int\limits_{B_R^2(0)} u(x)dx.$$

于是, $\int\limits_{B_{1/2}^2(0)} u(x)dx = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{4}.$

**习题 5.8**　设 $\Delta u(x) = 1, x \in \overline{B_2^2(0)} \setminus B_1^2(0)$. 那么

$$\int\limits_{S_1^2(0)} \frac{\partial u}{\partial \rho}(\rho, \theta)ds \quad 与 \quad \int\limits_{S_2^2(0)} \frac{\partial u}{\partial \rho}(\rho, \theta)ds$$

哪一个大些?

**解**　注意到

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \quad 当\ s \in S_2^2(0), \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = -\frac{\partial u}{\partial \rho} \quad 当\ s \in S_1^2(0),$$

其中 $\nu$ 是区域边界的外法线, 应用高斯 – 奥斯特洛格拉茨基 (Gauss-Остроградский) 公式. 我们有

$$3\pi = \int\limits_{\overline{B_2^2(0)} \setminus B_1^2(0)} 1dxdy = \int\limits_{\overline{B_2^2(0)} \setminus B_1^2(0)} \Delta u dxdy = \int\limits_{S_2^2(0)} \frac{\partial u}{\partial \rho}ds - \int\limits_{S_1^2(0)} \frac{\partial u}{\partial \rho}ds.$$

因此

$$\int\limits_{S_2^2(0)} \frac{\partial u}{\partial \rho}ds = \int\limits_{S_1^2(0)} \frac{\partial u}{\partial \rho}ds + 3\pi > \int\limits_{S_1^2(0)} \frac{\partial u}{\partial \rho}ds.$$

**习题 5.11**　设 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}); q \in C(\overline{\Omega})$;

$$\Delta u + q(x)u(x) = 0, \quad x \in \Omega; \quad M = \max_{\overline{\Omega}} u(x); \quad m = \max_{\partial\Omega} u(x).$$

如果

a) $q(x) \equiv 0$;

b) $q(x) > 0$;

c) $q(x) < 0, M > 0$;

d) $q(x) < 0, M < 0$,

是否可能 $M > m$?

**解**　a) 不可能 (极值原理);

b) 可能, 例子 (在 $n = 1$ 的情形):

$$u'' + u = 0 \quad 当\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

这时函数 $u=\cos x$ 是方程的解, 对于此解, 断言成立;

c) 不可能, 因为如果在内点 $x_0\in\Omega$ 达到最大值 $(u(x_0)=M)$, 那么 $\Delta u\leqslant 0$;

d) 可能, 例子 (在 $n=1$ 的情形):

$$u''-u=0,\quad 当\ x\in(-1,1),$$

这时函数 $u=-\operatorname{ch}x$ 是方程的解, 对此解, 断言成立.

**习题 5.12**　设 $\overline{\Omega}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|1\leqslant x^2+2y^2\leqslant 2\};u\in C^2(\overline{\Omega})$;

$$\begin{aligned}&\Delta u(x,y)=0, && (x,y)\in\overline{\Omega};\\ &u(x,y)=x+y, && x^2+2y^2=2;\\ &\frac{\partial u(x,y)}{\partial\nu}+(1-x)u(x,y)=0, x^2+2y^2=1.\end{aligned}$$

求 $\max\limits_{\overline{\Omega}}|u(x,y)|$.

**解**　根据极值原理, $\max\limits_{\overline{\Omega}}|u(x,y)|$ 在区域的边界上达到. 因此, 必须比较解在边界上的值.

我们来证明, 在边界的 $x^2+2y^2=1$ 这一段成立恒等式 $u\equiv 0$. 根据霍普夫 - 奥列尼克引理, 在边界上的最大值点 $\xi_{\max}\in\partial\Omega$ (最小值点 $\xi_{\min}\in\partial\Omega$) $\dfrac{\partial u}{\partial\nu}(\xi_{\max})\geqslant 0\left(\dfrac{\partial u}{\partial\nu}(\xi_{\min})\leqslant 0\right)$. 考虑到

$$(1-x)\geqslant 0,\quad 当\ x^2+2y^2=1,$$

可断定, 在这一段边界的最大值点函数值应是非正, 而在最小值点函数值应是非负的. 这表明函数应当是为零的常数.

现在求解在边界的另一部分上的最大值, 即

$$\max_{x^2+2y^2=2}(x+y).$$

容易看出, 最大值在第一象限达到. 这表明, 应当对于正的 $y$ 求函数 $f(y)=\sqrt{2-2y^2}+y$ 的最大值. 这个最大值在 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 达到, 且最大值等于 $\sqrt{3}$.

**习题 5.30**　对哪些 $\alpha$ 与 $\beta$, 在圆环 $B_2^2(0)\diagdown\overline{B_1^1(0)}$ 内存在具有边界条件

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|_{\rho=1}=1,\quad\left.\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}+\alpha u\right)\right|_{\rho=2}=\beta$$

的拉普拉斯方程边值问题的解? 在所有当解存在的情况下求出这个解.

**解** 在环内拉普拉斯方程解的一般形状为:

$$u(\rho,\theta) = A_0 + B_0 \ln \rho + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k\rho^k + B_k\rho^{-k})\cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty}(C_k\rho^k + D_k\rho^{-k})\sin k\theta.$$

相应地,

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}(\rho,\theta) = \frac{B_0}{\rho} + \sum_{k=1}^{\infty}(kA_k\rho^{k-1} - kB_k\rho^{-k-1})\cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty}(kC_k\rho^{k-1} - kD_k\rho^{-k-1})\sin k\theta.$$

那么根据边界条件

$$B_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(kA_k - kB_k)\cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty}(kC_k - kD_k)\sin k\theta = 1,$$

以及

$$\frac{B_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(kA_k 2^{k-1} - kB_k 2^{-k-1})\cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty}(kC_k 2^{k-1} - kD_k 2^{-k-1})\sin k\theta + \alpha\left(A_0 + B_0\ln 2 + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k 2^k + B_k 2^{-k})\cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty}(C_k 2^k + D_k 2^{-k})\sin k\theta\right) = \beta.$$

由此可直接推出

$$\begin{cases} B_0 = 1, \\ \dfrac{B_0}{2} + \alpha A_0 + \alpha B_0 \ln 2 = \beta, \\ A_k = B_k = 0, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

于是, 如果 $\alpha = 0$, 那么 $\beta = \dfrac{1}{2}$ 且解具有 $u(\rho,\theta) = A_0 + \ln\rho$ 的形状 (即准确到附加常数).

如果 $\alpha \neq 0$, 那么 $A_0 = \dfrac{\beta - \frac{1}{2}}{\alpha} - \ln 2$, 同时 $\beta$ 是任意的且

$$u(\rho,\theta) = \frac{2\beta - 1}{2\alpha} + \ln\frac{\rho}{2}.$$

**习题 5.33** a) 如下问题的解是否唯一?

$$u \in C^2(\overline{\Omega}), \quad 其中\ \overline{\Omega} = \overline{B_2^3(0)} \setminus B_1^3(0);$$
$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in \overline{\Omega};$$
$$\frac{\partial u(x)}{\partial \rho} - \alpha_1 u(x) = f_1(x), \quad x \in S_1^3(0);$$
$$\frac{\partial u(x)}{\partial \rho} + \alpha_2 u(x) = f_2(x), \quad x \in S_2^3(0);$$

$\alpha_k > 0$ 为常数 $(k = 1, 2)$.

b) 对 $\alpha_k < 0$ $(k = 1, 2)$ 为常数考虑同样的问题.

**解** 设 $u_1(x)$ 与 $u_2(x)$ 是所提问题的两个解, 考虑其差 $v(x) = u_1(x) - u_2(x)$, 它是具有齐次边界条件的与上述问题类似问题的解.

对函数 $v(x)$ 应用格林第一公式, 有

$$0 = \int\limits_{\Omega} v\Delta v dx = -\int\limits_{S_1^3(0)} \frac{\partial v}{\partial \rho} v dS + \int\limits_{S_2^3(0)} \frac{\partial v}{\partial \rho} v dS - \int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2 dx.$$

考虑到边界条件, 有

$$\alpha_1 \int\limits_{S_1^3(0)} v^2 dS + \alpha_2 \int\limits_{S_2^3(0)} v^2 dS + \int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2 dx = 0.$$

于是, 在 $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$ 时, 仅当 $v \equiv 0$ 时等式才能成立.

如果 $\alpha_1 < 0$ 及 $\alpha_2 < 0$, 那么具有齐次边界条件的问题的解是函数 $v(x) = A_0 + \dfrac{B_0}{\rho}$, 同时

$$\begin{cases} B_0 + \alpha_1(A_0 + B_0) = 0, \\ \dfrac{B_0}{4} - \alpha_2\left(A_0 + \dfrac{B_0}{2}\right) = 0. \end{cases} \tag{6.7}$$

因此, 系数 $\alpha_1$ 与 $\alpha_2$ 应满足关系式

$$\frac{\alpha_1}{4} + \alpha_2 + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{2} = 0, \tag{6.8}$$

在这种情况下, 所求问题的解不唯一.

容易看出, 在相反的情况下 (如果关系式 (6.8) 不成立) 方程组 (6.7) 仅有一个零解, 导致 $u_1$ 与 $u_2$ 重合 (即解的唯一性).

**习题 5.34** 求所有这样一些 $\alpha > 0$, 使得在半平面 $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ 中的拉普拉斯方程狄利克雷问题满足不等式

$$|u(x, y)| \leqslant M(1 + x + |y|)^\alpha$$

的解 $u(x,y)$ 是唯一的, 其中 $M>0$ 为常数.

**解**　设存在两个解 $u_1$ 与 $u_2$. 记 $v(x,y)=u_1(x,y)-u_2(x,y)$. 容易看出,$v$ 满足齐次的狄利克雷问题. 这个在半平面上的问题的通解具有下述形状:

$$v(\rho,\theta)=\sum_{k=1}^{\infty}(C_k\rho^k+D_k\rho^{-k})\sin k\theta.$$

考虑到条件

$$|v|\leqslant|u_1|+|u_2|\leqslant M_1(1+\rho\cos\theta+|\rho\sin\theta|)^\alpha\leqslant M_2(1+\rho)^\alpha,$$

我们得出结论, 解具有 $v(\rho,\theta)=\sum\limits_{k=1}^{K}C_k\rho^k\sin k\theta$ 的形状. 这里常数 $K$ 等于 $\alpha$ 的整数部分.

于是, 当 $\alpha\geqslant1$ 时, 存在非零函数 $v$, 因此, 所求问题的解不唯一. 当 $\alpha<1$ 时, 仅存在零解 $v$, 所以所求问题的解唯一.

**习题 5.35**　求所有这样一些 $\alpha>0$, 使得在区域

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\middle||y|<\frac{x}{\sqrt{3}}\right\}$$

内的拉普拉斯方程狄利克雷问题满足不等式

$$|u(x,y)|\leqslant M(1+x^2+y^2)^\alpha$$

的解唯一, 其中 $M>0$ 为常数.

**解**　变到极坐标系. 考虑狄利克雷问题的区域是扇形区域 $|\theta|<\dfrac{\pi}{6}$, 不等式可改写成

$$|u(r,\theta)|\leqslant M(1+r^2)^\alpha. \tag{6.9}$$

如果 $w(r,\theta)$ 是这个狄利克雷问题的另一个解, 那么 $v(r,\theta)=u(r,\theta)-w(r,\theta)$ 是在这个区域内满足零边界条件的调和函数. 对于 $v(r,\theta)$ 来说, 不等式 (6.9) 仍然成立 (不过, 可能常数 $M$ 更大一些), 因为 $|v|=|u-w|\leqslant|u|+|w|$. 于是, 我们应当寻求使得 $v$ 恒等于零的条件.

函数 $v$ 具有如下一般形状:

$$v(r,\theta)=\sum_{k=3}(A_kr^k+B_kr^{-k})\cos k\theta+\sum_{k=6}(C_kr^k+D_kr^{-k})\sin k\theta.$$

因为根据不等式 (6.9) 这个函数在零点有界, 那么所有的系数 $B_i, i=3,\cdots,$ 与 $D_i, i=6,\cdots,$ 等于零. 为了除去狄利克雷问题具有零边界条件且不是恒等于零的解, 应当要求 $|v(r,\theta)|$ 在无穷远处的增长严格小于 $r^3$. 于是 $\alpha<\dfrac{3}{2}$.

**习题 5.45**　设 $\Omega$ 是平面上的有界区域,$u(x) \in C^2(\Omega)$,

$$\Delta u = 0, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内},$$

$\varphi(x)$ 是 $\partial\Omega$ 上的连续函数且除去唯一的点 $x^* \in \partial\Omega$ 外对所有 $x_0 \in \partial\Omega$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \Omega}} u(x) = \varphi(x_0).$$

我们称这样的函数为 "除去一个边界点 $x^*$ 之外的狄利克雷问题 $\Delta u = 0, u\big|_{\partial\Omega} = \varphi(x)$ 的解". 这样的狄利克雷问题的解是否唯一?

**解**　考虑区域

$$\Omega = \left\{0 < r < 1, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right\} \subset \mathbb{R}^2,$$

其中 $(r, \varphi)$ 是平面上的极坐标系, 边界点 $x^* = 0 \in \partial\Omega$. 考虑狄利克雷问题

$$\Delta u = 0, \quad x \in \Omega, \quad u(x)\big|_{x \in \partial\Omega, x \neq 0} = 0.$$

本问题的解是不唯一的: $u_1(r, \varphi) \equiv 0, u_2(r, \varphi) = \left(r^2 - \dfrac{1}{r^2}\right) \sin 2\varphi$.

**习题 5.46**　设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是单位球的外部. 狄利克雷外问题

$$\Delta u(x) = 0, \quad |x| > 1, \quad u\big|_{|x|=1} = 0$$

的解 $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ 在补充条件: 当 $|x| \to +\infty$ 时

$$\text{a)} \int\limits_{|\xi - x| < 1} |u(\xi)|^2 d\xi = O(1), \quad \text{b)} \int\limits_{|\xi - x| < 1} |u(\xi)|^2 d\xi = o(1)$$

下是否唯一?

**解**　如所知, $\mathbb{R}^3$ 中狄利克雷外问题的解在补充条件当 $|x| \to +\infty$ 时 $u(x) \to 0$ 之下是唯一的. 根据对于调和函数按中心在点 $x$、半径为 1 的球的平均值定理,

$$|u(x)|^2 = \left|\frac{1}{4\pi/3} \int\limits_{|\xi - x| < 1} u(\xi) d\xi\right|^2 \text{[柯西 – 布尼亚科夫斯基不等式]}$$

$$\leqslant \frac{1}{(4\pi/3)^2} \int\limits_{|\xi - x| < 1} d\xi \cdot \int\limits_{|\xi - x| < 1} |u(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{4\pi/3} \int\limits_{|\xi - x| < 1} |u(\xi)|^2 d\xi.$$

条件 a) 等价于条件: 当 $|x| \to +\infty$ 时, $|u(x)| = O(1)$, 这个条件对于 $\mathbb{R}^3$ 中解的唯一性是不充分的. 例子: $u_1(x) \equiv 0, u_2(x) = 1 - |x|^{-1}$, 当 $|x| > 1$ 时 $|u_2(x)| \leqslant 1$,

$$\Delta u_2(x) = 0, \quad |x| > 1, \quad u_2\big|_{|x|=1} = 0,$$

$$\int\limits_{|\xi - x| < 1} |u_2(\xi)|^2 d\xi \leqslant \int\limits_{|\xi - x| < 1} d\xi = \frac{4\pi}{3} = O(1), \quad \text{当 } |x| \to +\infty \text{ 时}.$$

由条件 b) 推出, 当 $|x| \to +\infty$ 时 $u(x) \to 0$, 这表明, 这个问题的解是唯一的.

**习题 5.47**　a) 在 $B_1^2(0)$ 内求具有边界条件

$$u\big|_{\rho=1} = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-p-1} \sin(k^q \theta)$$

的拉普拉斯方程狄利克雷问题的解 $u(\rho, \theta)$, 其中 $p$ 与 $q$ 是给定的自然数.

b) 对哪些 $p$ 与 $q$, 这个解属于空间 $H^1(B_1^2(0))$?

**解**　a) 圆内狄利克雷问题解的一般形状为

$$u(\rho, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \rho^n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \rho^n \sin n\theta.$$

由边界条件推出, $A_n = 0, n = 0, 1, \cdots$, 同时 $n = k^q$ 及 $C_n = k^{-p-1}$.

于是解为

$$u(\rho, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-p-1} \rho^{k^q} \sin k^q \theta.$$

b) 容易计算出解 (当 $\rho \neq 0$) 的梯度的平方:

$$|\nabla u(\rho, \theta)|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2p+2q-2} \rho^{2k^q-2}.$$

如果 $u \in H^1(B_1^2(0))$, 那么 $\int\limits_{B_1^2(0)} |\nabla u|^2 dx < \infty$. 选择 $\delta$, 使得有 $0 < \delta < 1$, 那么

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\delta} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2p+2q-2} \rho^{2k^q-1} d\rho d\theta = 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{-2p+2q-2}}{2k^q} \rho^{2k^q}\Big|_0^{\delta}$$
$$= \pi \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2p+q-2} \delta^{2k^q} \to \pi \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2p+q-2}, \quad \text{当 } \delta \to 1 \text{ 时}.$$

如果 $-2p + q - 2 < -1$ 时, 即 $q < 1 + 2p$ 时, 级数收敛. 同样可以验证, 函数 $u$ 的古典梯度在球 $B_1^2(0)$ 内是广义的梯度, 并且在所得到的条件下函数 $u$ 本身属于空间 $L_2(B_1^2(0))$.

PDG

# 答　案

## 第 1 章

**1.1**　$\delta_{(1,1)}+\delta_{(-1,-1)}-\delta_{(1,-1)}-\delta_{(-1,1)}$.　**1.2**　$a=-1$.
**1.4**　$\Theta(x)(1-e^{-x})+C_1+C_2e^{-x}$.　**1.5**　$-\Theta(y-|x|)/2$.
**1.7**　不正确.　**1.8**　a) 可能; b) 可能; c) 不可能.
**1.9**　不能, 例子: $u=\sin(1/|x|)$.　**1.10**　b) 不是, 例子: $u=\sqrt{x-x^2}$.
**1.12**　a) $\alpha<\frac{1}{2}$; b) $\alpha>\frac{1}{2}, \alpha=0$.　**1.13**　$\alpha<\frac{1}{2}$.
**1.14**　a) 如果 $n\geqslant 7$, $\alpha$ 任意; 如果 $n=6, \alpha<-\frac{1}{2}$. b) 如果 $n\geqslant 7, \alpha>\frac{1}{2}$ 或 $\alpha=0$.
**1.15**　$\alpha>\frac{1}{2}, \alpha=0; \beta=(2k-1)\pi/2, k\in\mathbb{Z}$.
**1.16**　$\beta=(2k-1)\pi, k\in\mathbb{Z}$; 如果 $n\geqslant 3$, $\alpha$ 任意; 如果 $n=2, \alpha<\frac{1}{2}$; 如果 $n=1, \alpha=0$.
**1.18**　成立.　**1.19**　不成立.　**1.20**　0.

## 第 2 章

**2.1**　不存在.
**2.2**　对双曲型与椭圆型正确; 对抛物型不正确.
**2.3**　仅对 $u_{tt}=u_{xx}$ 有非常数解, 例子: $u=x^2+t^2$.
**2.4**　$z\neq y\pm 3x$.　**2.5**　a) $y=2e^{\pm(x-1)}$; b) $y=0$.
**2.6**　a) $x=C_1, x+y=C_2$; b) $u=e^y f(x)+g(x+y)$.
**2.7**　a) 双曲型; b) $x-2y=C_1, y=C_2$; c) $u=xy+f(x-2y)+g(y)$.
**2.8**　a) 当 $\alpha\neq 0$ 时为双曲型, 当 $\alpha=0$ 时为抛物型.

b) 当 $\alpha \neq 0$ 时标准形式为 $16\alpha^2 u_{\xi\eta} - 4\alpha u_\xi = 0$, 当 $\alpha = 0$ 时为 $u_{xx} + u_x = 0$.

c) 当 $\alpha \neq 0$ 时通解为 $u(x,y) = F(y+3\alpha x)\exp\left(\dfrac{y-\alpha x}{4\alpha}\right) + G(y-\alpha x)$; 当 $\alpha = 0$ 时为 $u(x,y) = F(y) + G(y)e^{-x}$.

**2.9** a) $\alpha > -4; \alpha \in \varnothing$; b) $\alpha = 0; \alpha = -4$; c) 不可能; d) 可能.

**2.11** a) $x+t=C$; b) $\alpha = \pm 1$; c) 当 $\alpha = 1$ 时为 $x+t=C$; 当 $\alpha = -1$ 时为 $x \pm t = C$. d) 例子: 当 $\alpha = 1$ 时 $u = t(x+t)$; 当 $\alpha = -1$ 时 $u = x - t$; e) 例子: 当 $\alpha = -1$ 时 $u = \sin(x-t)$; 当 $\alpha = 1$ 时解不存在.

**2.12** $x - y \pm t\sqrt{2} = 0$.

**2.13** 当 $\alpha = 0$ 时 $z = C$; 当 $\alpha \neq 0$ 时实特征不存在.

**2.14** $u = e^x f(x-y, x-z) + e^{-x} g(x-y, x-z)$.

**2.15** a) $\xi = x+y, \eta = 2x - y; u_{\xi\eta} + \xi u_\xi + u = 0$;

b) $u = e^{(x+y)(y-2x)}\left[f(x+y) + \displaystyle\int_0^{2x-y} g(s)e^{-(x+y)s}ds\right]$.

**2.16** $\alpha\beta + 3\beta^2 \neq 0$.　**2.17** a) $\alpha = 0$; b) $\alpha = -2$.

**2.18** 不适定.　**2.19** 适定.　**2.20** 适定.　**2.21** 不适定.

**2.22** a) 可以.

b) 不适定. 反例:

$$u = u_m(x,t) = \operatorname{Re}\exp\left\{-\sqrt{m} + im^2 t + \frac{1+i}{\sqrt{2}}mx\right\}$$
$$= \exp\left\{-\sqrt{m} + \frac{m}{\sqrt{2}}x\right\}\cos\left(m^2 t + \frac{m}{\sqrt{2}}x\right).$$

**2.23** $\alpha > 0$.

**2.24** 不适定. 例子: $u_n(x,y) = \dfrac{1}{n^2}e^{ny}\sin(\sqrt{n^2+1}x)$.

## 第 3 章

**3.1** 不存在.　**3.2** $|x_1 \pm x_2| \leqslant \sqrt{2}$.

**3.3** 例子: $\varphi(x) = 1, \psi(x) = x$.

**3.4** a) $\varphi(x) = 7x^2, \psi(x) = 2x$, 不唯一;　b) $\varphi(x) = x^2, \psi(x) = x$.

**3.5** 不唯一.　**3.6** $\beta < 0, \alpha$ 任意; $\beta = 0, \alpha < -\dfrac{1}{2}$.

**3.7** $\alpha = 0, \beta$ 任意; $\alpha \neq 0, \beta < -\dfrac{5}{2}$.

**3.8** $\operatorname{Re} a < 0, \operatorname{Im} a$ 是任意的; $\operatorname{Re} a = 0, \operatorname{Im} a \leqslant \dfrac{1}{2}$.

**3.10** $t_0 = \dfrac{1+|x_0|}{a}$, $c = \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{-1}^{1}\psi(x)dx$.

**3.11** $\frac{1}{a}$. **3.12** $\beta \geqslant \frac{\alpha}{2}+1$.

**3.13** $u(x,y,t) = [e^{-(x+t)^2} + e^{-(x-t)^2} + \arctan(y+t) + \arctan(y-t) + (\cos x + \sin y)\sin t]/2$.

**3.14** $u(x,t) = \frac{1}{18|x|}[(t+|x|)^9 - \left|t-|x|\right|^9]$, $|x| \neq 0; u(0,t) = t^8$.

**3.15** $u = \frac{\arctan(x_1+x_2+x_3+t\sqrt{3}) - \arctan(x_1+x_2+x_3-t\sqrt{3})}{2\sqrt{3}}$.

**3.16** a) $u(t,x,y,z) = \sin x \cos 2t + e^{2z}\,\mathrm{ch}\,4t$;

b) $u(t,x,y,z) = (yz)^2 + 4t^2(y^2+z^2) + \frac{16}{3}t^4$;

c) $u(t,x,y,z) = \frac{1}{2}[(3x-y+z+2\sqrt{11}t)\exp(3x-y+z+2\sqrt{11}t) + (3x-y+z-2\sqrt{11}t)\exp(3x-y+z-2\sqrt{11}t)]$.

**3.17** $\frac{1}{2}$. **3.18** a) $x_1^2+x_2^2 \geqslant (t+1)^2$; b) $\frac{1}{8}$.

**3.19** a) $0 \leqslant t \leqslant \min\{x_1, x_2, 1-x_1, 2-x_2\}$.

**3.20** $0 \leqslant t \leqslant 0.05, 0.9+t \leqslant |x| \leqslant 1-t; 0.9 \leqslant t \leqslant 1, |x| \leqslant \min\{1-t, t-0.9\}$.

**3.21** $q > m - \frac{1}{2}$.

**3.22** a) $n = 1, 2$; 对 $n = 3$ 的反例参看习题 3.20.

**3.23** 不可能.

**3.24** a) $t \in (\pi - x, 2\pi + x),\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$; $t \in ((\pi - x)_+, 2\pi - x) \cup (\pi + x, 2\pi + x),\ \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$; $t \in ((x-2\pi)_+, x-\pi) \cup (\pi + x, 2\pi + x),\ x \geqslant \frac{3\pi}{2}$.

**3.25** I) $\lambda \neq 1, \varphi \in C^2(\overline{\mathbb{R}}_+), \varphi'(0) = 0, \lambda\varphi''(0) = 0$;

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[\varphi(x+t) + \varphi(x-t)], & x \geqslant t, \\ \frac{1}{2}[\varphi(x+t) + \frac{\lambda+1}{\lambda-1}\varphi(t-x) - \frac{2}{\lambda-1}\varphi(0)], & x < t; \end{cases}$$

II) $\lambda = 1, \varphi(x) \equiv K$, $K$ 为常数

$$u(x,t) = \begin{cases} K, & x \geqslant t, \\ K + f(t-x), & x < t, \end{cases}$$

其中 $f \in C^2(\overline{\mathbb{R}}_+), f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$.

**3.26** $\varphi'(x) - 2\psi(x) = C$.

**3.27** $A = 1, \omega = \pm\sqrt{2}$;

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[e^{-(x+t)^2} + e^{-(x-t)^2}], & x \geqslant t, \\ \frac{1}{2}[e^{-(x+t)^2} - e^{-(x-t)^2}] + \cos\sqrt{2}(x-t), & x < t. \end{cases}$$

**3.28** b) $\beta \geqslant 2, \alpha(0) = \frac{1}{2}, \alpha'(0) = 1$.

**3.29** $\alpha=0,\beta$ 与 $k$ 任意; $\alpha\neq0,\beta>2,k<1$; 当 $k\geqslant-1$ 时解唯一, 当 $k<-1$ 时解不唯一.

**3.30** a) $0\leqslant t+x\leqslant2, 0\leqslant t-x\leqslant\dfrac{1}{2}$;

c) $u(x,t)=\varphi((t+x)/2)-\varphi(3(t-x)/2)+\psi(t-x)$.

**3.32** $\alpha=\beta=\gamma=0; u(x,t)=\sin x\cos t$.

**3.33** a) $30+36\pi^2$; b) $4\sin^3\pi x$.

**3.34** 不正确. **3.35** 1/105. **3.36** 1/1260.

**3.37** $\omega\notin\{\pm4,\pm6\}$. **3.38** $\alpha\neq\pm k\pi, k\in\mathbb{N}$.

**3.39** a) $k\geqslant\dfrac{1}{\pi}$; b) 参看本题解答.

**3.40** 可能.

## 第 4 章

**4.1** 可能. **4.2** 没有. **4.3** a) 不可能; b) 可能; c) 不可能.

**4.4** 不存在. **4.5** 不存在. **4.6** 成立.

**4.8** 0. **4.9** a) 对任意 $\varphi(x)$; b) $\displaystyle\int_0^1\varphi(x)dx=0$.

**4.10** $\alpha<\pi^2$. **4.11** $\displaystyle\int_0^\pi\varphi(x)\sin xdx=0$.

**4.12** a) $\varphi(x)$ 是任意的; b) 对 $k=1,2$, $\displaystyle\int_0^{3\pi}\varphi(x)\sin\frac{kx}{3}dx=0$; c) $\varphi(x)\equiv0$.

**4.13** $1+\dfrac{6x}{\pi}$. **4.14** $x_1x_2$. **4.15** 1. **4.16** $\alpha<\dfrac{4}{3}$.

**4.17** $3x-2$. **4.18** $+\infty$.

**4.19** a) $l>\dfrac{1}{3}$;

b) $\displaystyle\int_0^1\varphi(x)\operatorname{sh}(\omega x)dx=0$, 其中 $\omega>0$ 是方程 $\omega=3\operatorname{th}\omega$ 的解.

**4.20** c) 例如, 任意 $\varphi(x)\in C_0^\infty((0,4))$, 使得 $\varphi(x)\geqslant\max\{0,\sin(x-0,1)\}$.

**4.21** b) 不成立. **4.23** 可以.

**4.25** 无界. **4.26** $a(1-x)+bx$. **4.27** 不成立.

**4.29** $t<\dfrac{1}{4K}$. **4.31** 不唯一. **4.32** $u(x,t)=C$. **4.33** $\dfrac{1}{2}$.

**4.34** $\dfrac{\pi}{2}$. **4.35** $\dfrac{A}{2}$. **4.36** a) $\dfrac{1}{2}$; b) $\dfrac{1}{2}$; c) $\dfrac{1}{4}$.

**4.37** a) 及 b) $u(t,x)=e^{-(x_1+x_2+x_3)}$. **4.38** $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

**4.39** $A=\dfrac{1}{2}$. **4.40** 成立.

**4.43** $u(x,t) = e^{-\sqrt{\frac{5}{2}}x}\cos\left(5t - \sqrt{\frac{5}{2}}x\right)$.

## 第 5 章

**5.1** $u(x,y) = xy^3 - x^3y + C_1x + C_2$. **5.2** $u(x) \equiv 0$.
**5.3** $u(x,y) = C_1x + C_2y + C_3$. 其中 $C_1 < C_2$. **5.4** 没有.
**5.5** 其和等于零. **5.6** 0.
**5.7** $\frac{\pi}{16} - \frac{1}{4}$. **5.8** 第二个积分. **5.9** $u_2(x^0)$.
**5.10** a) 没有; b) 有.
**5.11** a) 不可能; b) 可能; c) 不可能; d) 可能. **5.12** $\sqrt{3}$.
**5.13** 不能. **5.15** 可以. **5.16** b) 0.
**5.18** 不成立. 例子: $Q = [0, \sqrt{2}\pi] \times [0, 2\pi], u(x,y) = \exp\left(-\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\sin\left(\frac{y}{2}\right)$.
**5.19** 为真, $u \equiv 0$. **5.20** 不存在.
**5.23** 对于具有间断边界函数的狄利克雷问题, 根据公式得到的函数 $u(x)$, 例如 $\Delta u = 0, |x| < 1;\ u\big|_{|x|=1} = \begin{cases} 0, x_1 \geqslant 0, \\ 1, x_1 < 0. \end{cases}$
**5.28** 不存在. **5.29** $\alpha \in \left\{-\frac{3}{4}; 0\right\}$.
**5.30** I) $\alpha \neq 0$, $\forall\beta$; $u = \frac{2\beta - 1}{2\alpha} + \ln\frac{\rho}{2}$; II) $\alpha = 0, \beta = \frac{1}{2}; u = \ln\rho + C$.
**5.31** 存在. **5.32** $u = \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{\cos\theta}{\rho} - \frac{\sin 2\theta}{2\rho^2}$.
**5.33** a) 唯一; b) 不唯一. **5.34** $\alpha < 1$. **5.35** $\alpha < \frac{3}{2}$.
**5.36** $u(0,y) = 2 + (y-2)\ln(2-y) - y\ln(-y)$.
**5.37** $-\infty$. **5.38** 存在.
**5.39** a) 唯一; b) $u(r,\theta) = \frac{1}{5}\left(\frac{4}{r} - r\right)\cos\theta + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{r} + r\right)\sin\theta$.
**5.40** a) 例子: 对任意解可以加上 $u(x,y) = \sin(\pi x)\exp(\pi y)$; b) 唯一.
**5.41** 不是. **5.42** $-\frac{1}{25}$. **5.43** 否. **5.44** $a = \frac{\pi}{2}$.
**5.45** 不唯一. **5.46** a) 不唯一; b) 唯一.
**5.47** a) $u(\rho,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-p-1}\rho^{k^q}\sin(k^q\theta)$; b) $q < 2p + 1$.
**5.50** b) $u(x) \equiv 0$; c) $u(x) \equiv 0$.
**5.51** $u(x) \equiv 0$. **5.52** $\frac{\pi}{2}$. **5.53** $2\pi$. **5.54** $-79\pi/2520$.

# 考试样题

## 2003 年, 经济类, 正常考试

### 主讲人: A. Ю. 高里茨基

**1.** **a)** (1 + 1) 求所有使方程

$$u_{xx} - 2u_{xy} + \beta u_{yy} = 0 \tag{1}$$

—— 化为弦振动方程 $u_{tt} = u_{zz}$;
—— 化为热传导方程 $u_t = u_{zz}$
的线性代换可实行的那些 $\beta$.

**b)** (1 + 2) 对方程

$$u_{xx} - 2u_{xy} + \beta u_{yy} + 2\beta u_x - \beta^2 u_y = 0$$

考虑同样的问题.

**c)** (3) 设有界函数 $u(x, y) \in C^2(\mathbb{R}^2)$ 对某些 $\beta > 5$ 满足方程 (1). 这时是否可能 $u \not\equiv$ 常数? 说明理由.

**d)** (2) 对 $\beta < -5$ 讨论同样的问题.

**2.** **a)** (1+1) 描述所有使得柯西问题

$$9u_{tt} = u_{xx}, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x) \tag{2}$$

的解 $u(t, x)$ 是关于 $t$ 的周期函数的那些以 $\pi$ 为周期的函数 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$. 求出这个周期.

**b)** (2+1) 对问题

$$9u_{tt} = u_{xx} + \sin t, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x)$$

讨论同样的问题.

**c)** (3) 在$\varphi$ 与 $\psi$ 是以 $\pi$ 为周期的函数并且没有更小的周期时, 柯西问题 (2) 的解 $u(t,x)$ 关于 $t$ 的周期是否可能小于 $2\pi$?

**3.** 设 $u(t,x)$ 是半带形 $(t,x) \in (0,+\infty) \times (0,\pi)$ 内边值问题

$$u_t = u_{xx}, \quad u_x\big|_{x=0} = u\big|_{x=\pi} = 0, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x)$$

的解.

**a)** (3) 证明 $\sup\limits_{0<x<\pi} |u(1,x)| \leqslant \sup\limits_{0<x<\pi} |\varphi(x)|$,

**b)** (2) 对于任意初始条件 $\varphi(x)$.

$$\sup_{0<x<\pi} |u(1,x)| \leqslant \frac{1}{2} \sup_{0<x<\pi} |\varphi(x)|$$

是否成立?

**c)** (3) 求初始函数为 $\varphi(x) = (\pi - x)(\pi + x)$ 时, 所提问题的解 $u(t,x)$.

**4. a)** (1+1) 给出索伯列夫意义下导数的定义. 给出空间 $\mathring{H}^1(\Omega)$ 的定义.

**b)** (2) 给出属于空间 $\mathring{H}^1(\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}^2$, 的 (在古典意义下) 无处可微的函数的例子. 证明该函数属于这个空间. 说明理由.

**c)** (3) 考虑单位球 $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 | |x| < 1\}$ 内的函数 $f(x) = (|x| \sin(\omega|x|)^\alpha$. 对哪些 $\alpha$ 与 $\omega$ 成立 $f(x) \in H^1(B_1)$?

**评分标准:** 当满分为 32 分时, 19 分以上为 "优秀", 12 分以上为 "良好", 5 分以上为 "及格". 考试时间为 3 小时.

## 2000 年, 力学类, 补考

### 主讲人: A. Ю. 高里茨基

### 第一部分

**1. a)** (1) 根据参数 $\alpha \in \mathbb{R}$ 确定方程

$$u_{xx} - 6u_{xy} + \alpha u_{yy} + 2u_x + (3-\alpha)u_y + \frac{\alpha - 5}{4} u = 0 \qquad (*)$$

的类型.

**b)** (1) 对 $\alpha = 5$, 把方程 $(*)$ 化为标准形式.

**c)** (1) 对 $\alpha = 9$, 考虑与上述同样的问题.

**d)** (1) 对 $\alpha = 5$, 求方程 $(*)$ 的通解.

**e)** (1) 对 $\alpha = 9$, 考虑与上一小题同样的问题.

**2.** **a)** (1) 在有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 内给出拉普拉斯方程狄利克雷问题的格林函数的定义.

**b)** (2) 假设问题

$$\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad u\big|_{x\in\partial\Omega} = \varphi(x)$$

存在古典解, 推导出以格林函数给出这个解的公式.

**c)** (1) 写出在球中拉普拉斯方程狄利克雷问题解的泊松公式.

**3.** **a)** (1) 叙述热传导方程柯西问题的提法.

**b)** (2) 叙述并证明在带形内热传导方程的极值原理以及对其所提柯西问题的唯一性定理.

**第二部分**

**1.** 求作为柯西问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ u\big|_{t=0} = e^{-x^2}\cos(2y - z) \end{cases}$$

的解的函数 $u(x, y, z, t)$.

**2.** 求对于哪些 $a$ 与 $b$, 问题

$$\begin{cases} \Delta u = r^3(a + \cos^2\theta), & u = u(r,\theta), r < 1, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = b|\theta|, & -\pi < \theta < \pi \end{cases}$$

有解.

**进行考试的条件** 第一部分考试用 1.5 小时. 为达到 “及格” 必须且只需得到满分的 12 分中的 4 分. 为达到 “良好” 与 “优秀”, 分别必须不少于 8 分及 10 分, 这样就可转入第二部分的考试.

其次, 为了在第二部分考试中达到 “优秀” 或 “良好”, 分别必须解出上述两道或两道题目之一.

## 1994 年, 力学组, 提前考试

**主讲人: A. C. 卡拉什尼柯夫**

**1.** (2) 是否存在在 $\mathbb{R}^3$ 中具有连续系数 $a_{ij}$ 的, 形如

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(x_1, x_2, x_3) u_{x_i x_j} = 0$$

的方程, 它在某个非空集合 $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^3, \Omega_1 \neq \mathbb{R}^3$ 上是椭圆型的, 在 $\Omega_1$ 的余集 $\Omega_2 = \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_1$ 上是双曲型的? 说明理由.

**2.** 求具有条件

$$u(x,x) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1; \quad u(x,2x) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$$

的方程 $u_{tt} = u_{xx}$ 的解 $u(x,t)$. 这里 $\varphi \in C^2([0,1]), \psi \in C^2\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right); \varphi^{(k)}(0) = 0, \psi^{(k)}(0) = 0, k = 0,1,2$.

**a)** (2) 借助于不等式描述使这个问题的解 $u(x,t)$ 单值确定的所有 $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ 的值的集合 $\Omega$. 说明理由.

**b)** (1) 画出这个集合 $\Omega$.

**c)** (2) 求出所考虑问题的解 $u(x,t)$.

**3.** (3) 设 $\Omega = \left\{(r,\theta) | 0 < r < 1, 0 < \theta < \frac{1}{4}\right\}, (r,\theta)$ 是平面上的极坐标, 求具有下列性质的函数 $u(r,\theta) : u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$;

$$\Delta u = 0 \quad 在\ \Omega\ 内; \quad u(r,0) = u\left(r,\frac{\pi}{4}\right) = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant 1;$$
$$u(1,\theta) = \pi\theta - 4\theta^2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

**4.** (3) 设 $\Omega = \{x = (x_1,x_2) | 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}, f(x) = \mathrm{sign}(x_2 - x_1)$. $f \in H^1(\Omega)$ 是否成立? 说明理由.

**5.** **a)** (1) 叙述泊松方程狄利克雷问题广义解的定义.

**b)** (2) 证明与狄利克雷问题对应的二次泛函是下有界的.

**c)** (2) 证明: 狄利克雷问题广义解是变分问题的解 (不证明逆命题).

**6.** **a)** (1) 叙述柯西 – 柯瓦列夫斯卡娅定理.

**b)** (2) 证明: 如果初始条件给定在特征上, 上述定理的结论不成立.

**7.** (4) 在矩形 $Q = \{(x,t) | 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant 2\}$ 中考虑方程 $u_t = u_{xx}$ 具有条件

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad u\big|_{x=0} = u\big|_{x=1} = 0, 0 \leqslant t \leqslant 2$$

的边值问题. 这个问题在空间偶 $(E_0, E_1)$ 中是否适定? 其中

$$E_0 = \{u(x,t) | u \in C(Q) \cap C^{2,1}_{x,t}((0,1) \times (0,2])\}, \|u\|_{E_0} = \max_Q |u(x,t)|;$$
$$E_1 = \{\varphi(x) | \varphi \in C^1([0,1]), \varphi(0) = \varphi(1) = 0\}, \|\varphi\|_{E_1} = \max_{[0,1]} |\varphi(x)|.$$

说明理由.

## 1997 年, 数学组, 正常考试

### 主讲人: B. A. 康德拉季耶夫

**1.** **a)** 叙述柯西 – 柯瓦列夫斯卡娅定理.

**b)** 证明: 所有的常系数二阶线性方程都可以化归标准形状.

**c)** 在怎样的区域中方程

$$u_{xy} + (3x + y - z)u_{xz} + (3x - y + z)u_{yz} = 0$$

是双曲型的?

**2.** **a)** 对拉普拉斯方程如何提狄利克雷外问题?

**b)** 对 $\mathbb{R}^3$ 中的拉普拉斯方程的诺伊曼外问题证明其解的唯一性.

**c)** 求诺伊曼外问题

$$\Delta u = 0, \quad x^2 + y^2 > 1, \quad u\big|_{x^2+y^2=1} = x^4$$

的解.

**3.** **a)** 给出在一点一致收敛积分的定义.

**b)** 证明: 单层势是连续函数.

**c)** 求

$$\lim_{(x,y)\to\infty} \int\limits_{\xi^2+\eta^2=1} (\xi^2 - 2\eta^2) \ln[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2] dS_{\xi,\eta}.$$

**4.** **a)** 对弦振动方程怎样提混合边值问题?

**b)** 写出波动方程柯西问题解的基尔霍夫公式. 证明: 按此公式构造的解满足初始条件.

**c)** 设 $u(x, y, z, t)$ 是柯西问题

$$u_{tt} = 4\Delta u, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\big|_{t=0} = 0$$

的解, 其中 $\varphi(x)$ 仅在平行六面体

$$-1 < x < 1, \quad -\frac{1}{2} < y < 1, \quad 0 < z < 1$$

内异于零. 对于哪些 $t, u(4, -1, 2, t) \neq 0$?

**5.** **a)** 给出索伯列夫意义下的广义导数

$$\frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

的定义.

**b)** 证明空间 $H^1(\Omega)$ 的完备性.

**c)** 对哪些 $\alpha$, 函数

$$u(x,y)=\ln^{\alpha}(x^2+xy+2y^2)$$

属于 $H^1(\Omega)$, 其中 $\Omega$ 是 $2n$ 维正方形 $|x|<1,|y|<1$.

**评分标准:** "优秀"—— 完整地答出三道大题; "良好"—— 完整地答出两道大题; "及格"—— 完整答出一道大题. 考试时间为 3 小时.

## 1994 年, 数学组, 正常考试

**主讲人: C. H. 克鲁日科夫**

**1.** 设 $u(t,x)$ 是在 $\Pi_+=[0,+\infty)\times\mathbb{R}^3$ 中方程 $u_{tt}=\Delta u, x=(x_1,x_2,x_3)$, 具有初始条件

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x),\quad u'_t\big|_{t=0}=\psi(x)$$

的柯西问题的古典解, 并且对 $x\in K_1=\{x:|x|<1\}$ 有 $\Delta\varphi(x)=0$ 及 $\Delta\psi(x)=0$.

**a)** 在锥 $C_1=\{(t,x):|x|^2<(1-t)^2, 0<t<1\}$ 内推导出

$$u(t,x)=\varphi(x)+t\psi(x),$$

不要应用直接验证这个公式的方式 (考虑到唯一性定理).

**b)** 证明: 如果在 $\mathbb{R}^3\diagdown K_1$ 内 $\varphi(x)<3$ 及 $\psi(x)<7$, 那么在锥 $C_1$ 内 $u(t,x)\leqslant 10$.

**2.** 在平面 $\mathbb{R}^2$ 上给定区域的序列 $\Omega_m\subseteq\left\{x=(x_1,x_2):|x|<\dfrac{1}{m}\right\}, m=1,2,3,\cdots$, 以及在 $\{x:|x|\in\Omega_m\}$ 内拉普拉斯方程狄利克雷问题古典解这样的序列 $u_m(x)$: $|u_m(x)|\leqslant 1$.

**a)** 证明: 如果当 $m\to\infty$ 时序列 $u_m(x)$ 在某一点收敛于数 $U$, 那么当 $m\to\infty$ 时在任一环 $\left\{x:0<\delta<|x|<\dfrac{1}{\delta}\right\}$ 内 (这里 $m>m(\delta)$) 一致地有 $u_m\to U$.

**b)** 在 $\Omega_m=\left\{x=(x_1,x_2):|x|<\dfrac{1}{m}\right\}$ 的情形, 在条件

$$\left|u_m\big|_{\partial\Omega_m}\right|<\frac{1}{m},\quad u_m\big|_{|x|=m}=1$$

之下证明: 当 $m\to\infty$ 时在任一环 $\{x:0<\delta<|x|<\frac{1}{\delta}\}$ 内 (这里 $m>m(\delta)$) 一致地有 $u_m(x)\to\dfrac{1}{2}$; 建议比较一下 $u(x)$ 和拉普拉斯方程相应的形如 $a\ln|x|+b$ ($a$ 与 $b$ 是常数) 的解.

## 1994 年, 数学组, 提前考试

### 主讲人: E. M. 兰吉斯

1. $u(x,t) \in C^2(\mathbb{R}^2_{x,t})$ 是 $\mathbb{R}^2_{x,t}$ 中方程 $u_{tt}-a^2u_{xx}=0$ 的解. 在区域 $\{\alpha < x < \beta, t = 0\}$ 上 $u = u_t = 0$. 在平面 $\mathbb{R}^2_{x,t}$ 上何处解 $u(x,t)$ 必定等于零?
2. $u(x,t)$ 是半带形 $\Pi = \{0 < x < l, t > 0\}$ 中方程 $u_t = u_{xx}$ 的解, 它在 $\overline{\Pi}$ 上连续, $u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = 0$, 当 $t \to \infty$ 时, 解趋向于什么?
3. 求问题

$$\Delta u = 2, \quad 在圆\ K = \{(x,y)|x^2+y^2<1\}\ 内; \quad u\big|_{\partial K} = \sin 2\varphi$$

的解.

4. $u(x,y)$ 是光滑闭曲线 $L \subset \mathbb{R}^2$ 的双层势. 证明当 $x^2+y^2 \to \infty$ 时

$$u(x,y) = O\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

5. $B \subset \mathbb{R}^n$ 是开球, $u(x)$ 在 $\overline{B}$ 中连续且 $\forall x \in B, \exists \rho_x > 0$ 使得中心在点 $x$、半径为 $\rho_x$ 的球 $B(x,\rho_x)$ 含于 $B$ 内并且

$$u(x) = \frac{1}{|B(x,\rho_x)|}\int\limits_{B(x,\rho_x)} u(y)dy.$$

证明: $u(x)$ 是调和函数.

## 1998 年, 数学组, 正常考试

### 主讲人: E. B. 拉德凯维奇, T. Д. 文特策尔

1. 对于方程 $u_{tt} = 4u_{xx}$ 考虑边值问题

$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=1} = 0, \quad u\big|_{t=0} = x(1-x), \quad u'_t\big|_{t=0} = \sin \pi x.$$

   **a)** (1) 求 $f(13)$, 其中 $f(t) = \int\limits_0^1 [u_t^2 + 4u_x^2]dx.$

   **b)** (1) 求函数 $u(x,z)$ 并画出它的图像.

2. **a)** (1) 给出方程

$$\sum a_{ij}u_{x_ix_j} = 0$$

   的特征的定义.

**b)** (1) 求方程 $u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0$ 经过点 $(1, 2)$ 与 $(1, 0)$ 的特征.

**3.** **a)** (1) 叙述关于可去奇点的定理.

**b)** (2) $\Omega$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中某个有界区域, 在 $\mathbb{R}^2$ 中, 证明: 对于在 $\mathbb{R}^2 \diagdown \overline{\Omega}$ 中有界的调和函数 $u(x)$, 存在极限 $\lim\limits_{x \to \infty} u(x)$.

**c)** (2) 在 $\Omega$ 是单位圆,

$$u\Big|_{r=1} = f(\varphi), \quad \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = 0$$

的情形下, 求这个极限.

**4.** 对方程 $u_{tt} - 4u_{xx} = 0$ 提如下问题:

$$u\Big|_{x=0} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = \begin{cases} \sin x, & x \in [\pi, 2\pi], \\ 0, & x \notin [\pi, 2\pi], \end{cases} \quad u'_t\Big|_{t=0} = 0.$$

**a)** (1) 当 $t = 2\pi$ 时画出解的图像.

**b)** (1) 当补充条件 $u\big|_{x=2\pi} = 0, x \in [0, 2\pi]$ 后, 画出 $t = 2\pi$ 时解的图像.

**c)** (2) 当补充条件 $u'_x\big|_{x=2\pi} = 0, x \in [0, 2\pi]$ 后, 画出 $t = 2\pi$ 时解的图像.

**5.** 考虑满足初始条件

$$u\Big|_{t=0} = 0, \quad u'_t\Big|_{t=0} = \begin{cases} \psi(x), & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ 0, & \text{在 } \mathbb{R}^2 \diagdown \Omega \text{ 中} \end{cases}$$

的方程

$$u_{tt} = \Delta u$$

(空间变量数等于 2) 的解, 其中 $\Omega$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的有界区域.

**a)** (1) 如果 $\Omega$ 是单位圆 $x_1^2 + x_2^2 < 1$, 那么在空间 $(x, t)$ 的何处, 函数 $u(x, t)$ 不依赖于函数 $\psi(x)$ 而等于零?

**b)** (2) 当 $\psi(x) = (1 - \|x\|^2)^2, \Omega = \{x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ 时求 $\lim\limits_{t \to \infty} tu(x, t)$.

**6.** **a)** (1) 对热传导方程怎样提柯西问题?

**b)** (1) 证明: 如果初始函数是奇函数, 那么解 $u(x, t)$ 满足条件 $u(0, t) \equiv 0$.

**c)** (2) 证明: 如果初始函数是奇函数, 那么解 $u(x, t)$ 关于 $x$ 是奇函数.

**评分标准:** 当满分为 20 分时, "优秀" —— 16 分以上, "良好" —— 13 分以上, "及格" —— 9 分以上. 考试时间: 3 小时.

## 2001 年, 数学组, 正常考试

### 主讲人: E. B. 拉德凯维奇

**1.** **a)** (1) 给出霍普夫 (Hopf) 方程弱解 (在积分恒等式意义下的解) 的定义.

**b)** (2) 构造具有 5 条间断线的分块常数解.

**c)** (2) 证明: 不存在具有 4 条间断线的分块常数解.

**2.** **a)** (1) 给出自相似解①的定义并求出方程

$$u_t + u^3 u_x = 0$$

的自相似解.

**b)** (2) 在自相似解类中, 证明满足熵不增条件的解的唯一性.

**3.** **a)** (1) 叙述波动方程柯西问题古典解存在的条件.

**b)** (3) 设 $u$ 是柯西问题

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < t < T, \quad x \in \mathbb{R}^1,$$
$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\big|_{t=0} = 0$$

的古典解; 而 $u^N$ 是混合问题

$$u_{tt}^N = u_{xx}^N, \quad 0 < t < T, \quad x \in [-N, N],$$
$$u^N\big|_{t=0} = \varphi^N(x), \quad u_t^N\big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u^N}{\partial x}\bigg|_{x=N} = 0$$

的古典解. 同时对充分小的固定的 $\alpha$ 与 $\beta$ 使得 $M + \alpha < N - \beta$ 有

$$\varphi^N = \varphi \quad 当\ x \in (-M - \alpha, M + \alpha)$$

及

$$\varphi^N = 0 \quad 当\ x \notin (-N + \beta, N - \beta).$$

证明: 存在这样的 $N_0$, 使得在闭区间 $[-M, M]$ 上当 $N > N_0$ 时 $u \equiv u^N$.

**4.** (3) 对于平面上的三个方程

$$u_t = u_{xx}, \quad u_{tt} = u_{xx}, \quad u_{tt} = -u_{xx},$$

其中有哪些方程存在具有有界、闭等位线的非平凡解?

**5.** **a)** (1) 叙述关于法向导数的引理.

①原文为 “автомодельное решение”. —— 译者注

b) (3) 证明满足下面条件的调和函数 $u \in C^1(\overline{\Omega})$ 恒等于零:

$$\frac{\partial u}{\partial v} = 0 \quad 在\ \Gamma_1\ 上, \quad u = 0 \quad 在\ \Gamma_2\ 上,$$
$$\overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2 = \partial\Omega, \quad \operatorname{mes}_{n-1}\Gamma_2 \neq 0.$$

**6. a)** (1) 叙述调和函数的平均值定理.

**b)** (2) 证明: 对任一球 $\overline{K} \subset \Omega$ 满足平均值定理的函数 $u \in C^2(\Omega)$ 是调和函数.

**7.** (3) 设 $C$ 是锥 $\left\{(x,y)|\alpha \leqslant \dfrac{x}{y} \leqslant \beta\right\}$. 证明: 在弗里德里希斯不等式中不存在对所有有界的 $\Omega \subset C$ 的共同常数.

**评分标准:** 当满分为 25 分时, 16 分以上为 “优秀”, 13 分以上为 “良好”, 8 分以上为 “及格”. 考试时间为 3 小时.

## 2003 年, 力学组, 提前考试

**主讲人: Г. А. 切契金**

**1. a)** (2) 给出自相似解的定义并求出方程

$$u_t + \left(\frac{u^6}{6}\right)_x = 0 \tag{1}$$

的自相似解.

**b)** (2) 构造方程 (1) 的初始条件为

$$u\big|_{t=0} = 0$$

的柯西问题的任何非平凡、非熵的广义解.

**2. a)** (1) 依赖实参数 $\alpha$, 确定方程

$$u_{xx} - 2\alpha u_{xy} - 3\alpha^2 u_{yy} + \alpha u_y + u_x = 0 \tag{2}$$

的类型.

**b)** (2) 化方程 (2) 为标准形式.

**c)** (2) 求这个方程的通解.

**3. a)** (1) 叙述具有非齐次边界条件的狄利克雷问题的变分提法.

**b)** (1) 证明泛函的下有界性.

**c)** (3) 如果 $\Omega = \{x = (x_1, x_2) : 1 < |x| < 2\}$, 计算

$$\inf_{w-(|x|-1)\in \mathring{H}^1(\Omega)} \int\limits_{\Omega} (|\nabla w|^2 - 2w)dx.$$

**评分标准:** 当满分为 14 分时, 11 分以上为 “优秀”, 8 分以上为 “良好”, 5 分以上为 “及格”. 考试时间为 1.5 小时.

## 2003 年, 力学组, 正常考试

### 主讲人: Γ. A. 切契金

### 第一部分

**1.** **a)** (1) 给出方程

$$u_t + \left(\frac{u^3}{3}\right)_x = 0 \tag{1}$$

广义解的定义.

**b)** (2) 设 $u(t,x)$ 是方程 (1) 带有间断线 $x = x(t)$ 的、分块光滑的具有紧支集的广义解. 记

$$S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t,x)dx.$$

证明 $S(t)$ 与 $t$ 无关.

**2.** **a)** (1) 给出调和函数的定义.

**b)** (1) 叙述关于调和函数的刘维尔定理.

**c)** (3) 求所有使得

$$u_y(x,y) = ixy + ie^{(x+iy)}$$

的、在 $\mathbb{R}^2$ 中为调和函数的 $u(x,y)$.

**3.** **a)** (1) 给出问题提法适定性的定义.

**b)** (2) 方程

$$u_t = -u_{xx}$$

的柯西问题是否适定? 说明理由.

**第一部分的评分标准:**

4~7 分为 "及格",

8~11 分 "许可" 进入第二部分的考试.

考试时间为 1.5 小时.

### 第二部分

**4.** (2) 设 $G(x,y)$ 是拉普拉斯算子狄利克雷问题的格林函数. 证明 $G(x,y) = G(y,x)$.

**5.** 考虑问题

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \psi, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}. \end{cases} \tag{2}$$

**a)** (1) 给出问题 (2) 的变分提法.

**b)** (3) 证明蕴含关系

$$\begin{array}{c}(2)\text{ 的古典解}\\ \Downarrow\\ (2)\text{ 的广义解}\\ \Updownarrow\\ \text{与 }(2)\text{ 相应的变分问题的解}\end{array}$$

**6.** 设 $Q=(0,l)\times(0,T)$.
考虑边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left((\cos x+2)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)-\left(\sin\dfrac{\pi x}{l}\right)u, & \text{在 } Q \text{ 内},\\ u\big|_{t=0}=\sin\dfrac{\pi x}{l}, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant l,\\ u_t\big|_{t=0}=0, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant l,\\ u\big|_{x=0}=u\big|_{x=l}=0, & \text{当 } 0\leqslant t\leqslant T.\end{cases}$$

**a)** (2) 写出对上述问题的傅里叶方法的格式.

**b)** (3) 证明:

$$\mathscr{E}(t)=\int_0^l\left[(\cos x+2)(u_x)^2+\left(\sin\frac{\pi x}{l}\right)u^2+(u_t)^2\right]dx$$

与时间无关.

**第二部分的评分标准:**

0~ 4 分为 “及格”,
5~ 8 分为 “良好”,
9~ 11 分为 “优秀”.
考试时间为 1.5 小时.

## 2003 年, 力学组, 补考

**主讲人: Г. А. 切契金**

**第一部分**

**1.** 考虑柯西问题

$$\begin{cases}u_t+\ln u\,u_x=0,\\ u\big|_{t=0}=u_0(x).\end{cases}$$

构造解 (2+2 分), 验证其满足兰金 – 于戈尼奥 (Rankine-Hugoniot) 条件和熵增加条件 (1+1 分), 如果

a) $u_0(x)=\begin{cases}4, & \text{当 } x>0,\\ 1, & \text{当 } x<0.\end{cases}$

b) $u_0(x)=\begin{cases}4, & \text{当 } x<0,\\ 1, & \text{当 } x>0.\end{cases}$

**2.** (2) 对初值问题

$$u_{tt}=\frac{1}{4}u_{xx};\quad u\big|_{t=0}=0;\quad u_t\big|_{t=0}=\begin{cases}\sin x, & x\in[\pi,2\pi],\\ 0, & x\notin[\pi,2\pi].\end{cases}$$

画出解 $u(t,x)$ 在时刻 $t=\pi$ 时的图像.

**3.** 设

$$\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\big|1<x^2+4y^2<4\},$$
$$\Gamma_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\big|x^2+4y^2=1\},$$
$$\Gamma_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\big|x^2+4y^2=4\}.$$

在区域 $\Omega$ 考虑边值问题:

$$\begin{cases}\Delta u=0, & \text{在 } \Omega \text{ 内},\\ xu_x+4yu_y-\sqrt{x^2+16y^2}u=0, & \text{在 } \Gamma_1 \text{ 上},\\ xu_x+4yu_y+\sqrt{x^2+16y^2}u=0, & \text{在 } \Gamma_2 \text{ 上}.\end{cases}\tag{1}$$

**a)** (2) 问题 (1) 的解是否唯一?

**b)** (1) 求解在点 (1,0) 的值.

**c)** (1) 写出问题 (1) 广义解的定义.

**d)** (2) 写出问题 (1) 的变分提法.

**第一部分评分标准:**

4~10 分为 “及格”,

11~14 分 “许可” 进入第二部分的考试.

考试时间为 1.5 小时.

## 第二部分

**4. a)** (1) 求方程

$$u_{xy}-u_{yy}-u_x+u_y=0$$

的所有特征.

**b)** (2) 求上述方程的通解.

PDG

**5.** (2) 求 $\max\limits_{x^2+y^2=1} u(x,y)$, 其中 $u(x,y)$ 是柯西问题

$$y\frac{\partial u}{\partial x}+x^2=x\frac{\partial u}{\partial y}+y^2;\quad u(0,y)=\frac{1}{y^2}$$

的解.

**6.** (3) 求如下问题的解:

$$\begin{aligned}&u_{xx}-u_{tt}=\sin x+\sin t,\quad 0<x<\pi,\quad t>0,\\&u\big|_{x=0}=0,\quad u\big|_{x=\pi}=1,\quad u\big|_{t=0}=\frac{x}{\pi},\quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0.\end{aligned}$$

**7.** 现有如下施图姆 – 刘维尔问题:

$$(p(x)X')'+q(x)X+\lambda X=0,\quad x\in[0,l],$$
$$p\in C^1([0,l]),\quad q\in C([0,l]),\quad p\geqslant p_0>0,\quad q\leqslant 0,\quad X\in C^2([0,l]).$$

**a)** (2) 证明 $\lambda>0$.

**b)** (3) 证明: 本征值趋于 $+\infty$.

**第二部分评分标准:**

0~5 分为 "及格",
6~9 分为 "良好",
10~13 分为 "优秀".
考试时间为 1.5 小时.

## 2000 年, 数学组, 提前考试

### 主讲人: A. C. 沙玛耶夫

**1.** **a)** (1) 写出弦振动方程解的达朗贝尔公式.

**b)** (3) 设 $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\big|x^2+y^2<1\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中单位圆. 如下问题是否适定? 求 $u(x,y)\in C^2(K)\cap C(\overline{K})$, 使得

$$u_{xx}-u_{yy}=0\ \ 在\ K\ 内,\quad u\big|_{\partial K}=\varphi(x,y),$$

$\varphi(x,y)\in C(\partial K)$ 是任意连续函数.

**2.** **a)** (1) 给出空间 $\mathring{H}^1(Q)$ 的定义.

**b)** (2) 证明空间 $H^1(Q)$ 的完备性.

**c)** (3) 设 $Q=\{|x|<1,x\in\mathbb{R}^3\}$. 如下断言是否正确: 存在常数 $C>0$ 使得对任意 $u(x)\in C^\infty(\overline{Q})$

$$|u(0)|\leqslant C\|u\|_{H^1(Q)}?$$

如果回答是肯定的, 给予证明; 如果回答是否定的, 举出反例.

**3.** **a)** (3) 设 $K=\{1<|x|<2\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的 "环形" 区域, 如下边值问题的解是否是唯一的?

$$\Delta u=0 \quad \text{在 } K \text{ 内}, \quad u\in C^2(K)\cap C^1(\overline{K}),$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{|x|=1}=\varphi_1(x_1,x_2), \quad u\big|_{|x|=2}=\varphi_2(x_1,x_2),$$

$\varphi_1$ 与 $\varphi_2$ 分别是在圆周 $\{|x|=1\}$ 与 $\{|x|=2\}$ 上的任意连续函数. 回答要说明理由.

**b)** (2) 如果 $\varphi_1=\cos\theta, \varphi_2=\sin\theta$ ($\theta$ 是平面上的极角), 求出上面 **a)** 小题所提问题的解.

**4.** **a)** (1) 叙述拉普拉斯方程的极值原理.

**b)** (3) 对于在平面上有界区域 $Q$ 内的方程

$$\Delta u+u_x+u=0, \quad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

如同拉普拉斯方程那种形式的极值原理是否成立? 说明理由.

**5.** **a)** (1) 叙述对于拉普拉斯方程的刘维尔定理.

**b)** (3) 设 $u(x)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的调和函数且

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{u^2(x)dx}{(1+|x|)^3}<\infty.$$

在 $\mathbb{R}^3$ 中 $u(x)\equiv$ 常数是否成立? 说明理由.

**6.** **a)** (1) 给出双层势的定义.

**b)** (3) 证明: 由李雅普诺夫闭曲面 $S$ 给出的、具有单位密度的双层势在 $S$ 外等于零, 在 $S$ 内等于 $4\pi$.

**7.** **a)** (1) 写出热传导方程柯西问题解的泊松公式.

**b)** (3) 设 $u(x,t)$ 是具有 "势" 的热传导方程

$$u_t=u_{xx}-u, \quad t>0, \quad x\in\mathbb{R}^1,$$

满足初始条件

$$u\big|_{t=0}=\sin^2 x$$

的解. 证明: 存在常数 $A$ 使得

$$|u(t,x)-Ae^{-t}|\leqslant\alpha(t)e^{-t},$$

其中, 当 $t\to\infty$ 时, 函数 $\alpha(t)\to 0$. 求出常数 $A$.

**评分标准:** 当满分为 31 分时, 22 分以上为 "优秀", 15 分以上为 "良好", 10 分以上为 "及格". 考试时间为 3 小时.

## 2000 年, 数学组, 正常考试

**主讲人: A. C. 沙玛耶夫**

**1.** **a)** (1) 叙述二阶微分算子的特征曲面的定义.

**b)** (3) 考虑如下问题: 在扇形

$$K = \{(x,t)|x > 0, t > 0, t < 2x\}$$

内求满足方程

$$u_{tt} = u_{xx}$$

及初边值条件

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \quad u\big|_{t=2x} = 0,$$

$\varphi(x), \psi(x) \in C^\infty([0,\infty))$ 的函数 $u(x,t) \in C^2(K) \cap C(\overline{K})$. 这个问题是否有解? 如果有解是否唯一? 说明理由.

**2.** **a)** (2) 证明弗里德里希斯不等式.

**b)** (3) 在带形

$$\Pi = \{(x,y) : 0 < x < 1, -\infty < y < +\infty\}$$

中弗里德里希斯不等式是否成立? 如答案是肯定的, 给予证明; 如答案是否定的, 举出反例.

**3.** **a)** (2) 给出在有界区域 $Q$ 内狄利克雷问题的古典提法并证明解的唯一性.

**b)** (3) 证明: 在带形 $\Pi = \{(x,y) : 0 < x < 1, -\infty < y < +\infty\}$ 内狄利克雷问题

$$\Delta u = 0 \quad 在\ \Pi\ 内, \quad u\big|_{x=0} = \varphi_1(y), \quad u\big|_{x=l} = \varphi_2(y), \quad \varphi_1, \varphi_2 \in C(\mathbb{R}^1)$$

的解不唯一.

**c)** (2) 补充了条件

$$u(x,y) \to 0, \quad 当\ |y| \to \infty\ 时,$$

上一小题中所提问题的解是否唯一? 说明理由.

**4.** (3) 设 $Q = \{x \in \mathbb{R}^4, |x| < 1\}$ 是四维空间中的球, $\ell = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, 0 < x_4 < \frac{1}{2}\}$ 是 $\mathbb{R}^4$ 中的线段,$Q_1 = Q \diagdown \ell$. 求狄利克雷问题

$$\int_{Q_1} (\nabla u, \nabla v) dx = 0, \quad \forall v \in \mathring{H}^1(Q_1),$$

$$u - \varphi(x) \in \mathring{H}^1(Q_1), \quad \varphi(x) \in C_0^\infty(Q) \quad 及当\ x \in \ell\ 时 \quad \varphi(x) = 1$$

的广义解.

**5.** (2) 在球 $Q = \{|x| < 1\}, x \in \mathbb{R}^3$ 中是否存在正的调和函数使得 $u(0,0,0) = 1, u(0,0,\frac{1}{2}) = 10$? 说明理由.

**6.** (4) 设 $u(t,x) \in C^2(\Pi) \cap C(\overline{\Pi})$ 是方程

$$u_t = u_{xx} + v(t,x)$$

的古典解, 其中 $\Pi = (0,+\infty) \times (0,1), v(t,x)$ 是有界可测函数, 它满足估计 $|v| \leqslant C, C > 0$ 是给定的常数. 设

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \text{其中 } \varphi(x) \in C^\infty([0,1]),$$
$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=1} = 0, \quad \forall t > 0.$$

是否可以选择函数 $v(t,x)$ 使得 $u(t,x) \equiv 0, \forall t > t_*$? 其中 $t_*$ 是某个正常数. 说明理由.

**7.** (3) 对哪些参数值 $a \in \mathbb{R}^1$, 对于 $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, 当 $t > ax$ 时等于 0 而当 $t \leqslant ax$ 等于 1 的函数 $u(t,x)$ 是方程

$$u_t = u_x$$

在广义函数论意义下的解? 说明理由.

**8.** (3) 设 $u(t,x) \in C^2(\Pi) \cap C^1(\overline{\Pi})$ 是方程

$$u_t = u_{xx} + 3u \quad \text{在带形 } \Pi = (0,+\infty) \times (0,1) \text{ 中}$$

的满足边界条件

$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=1} = 0, \quad t > 0$$

的古典解. 证明: 对 $u(t,x)$ 成立不等式

$$|u(t,x)| < Ce^{-6t}$$

其中 $C > 0$ 是某个常数.

**评分标准:** 当满分为 31 分时, 22 分以上为 “优秀”, 15 分以上为 “良好”, 10 分以上为 “及格”. 考试时间为 3 小时.

## 2000 年, 数学组, 补考

**主讲人: A. C. 沙玛耶夫**

**1.** **a)** (2) 叙述柯西 – 柯瓦列夫斯卡娅定理.

**b)** (3) 设 $K=(0,+\infty)\times(0,+\infty)$, 对哪些实数 $\alpha$, 存在如下边值问题

$$u_{tt}=u_{xx} \quad \text{在 } K \text{ 内},$$
$$u\big|_{t=0}=\varphi(x),\quad u_t\big|_{t=0}=\psi(x),\quad \varphi(x),\psi(x)\in C_0^\infty((0,+\infty)),$$
$$(u_x+\alpha u)\big|_{x=0}=0 \quad \text{对 } t>0$$

的解 $u(x,t)\in C^2(K)\cap C^1(\overline{K})$? 说明理由.

**2.** **a)** (1) 叙述对拉普拉斯方程的严格极值原理.

**b)** (2) 对方程

$$u_{tt}=u_{xx},$$

极值原理是否成立? 如果成立, 给予证明; 如果不成立, 举出反例.

**3.** (3) 设 $u(x,t)$ 是问题

$$u_{tt}=u_{xx} \quad \text{在 } \Pi=(0,\pi)\times(0,+\infty) \text{ 中},$$
$$u\big|_{t=0}=\varphi(x),\quad u_t\big|_{t=0}=\psi(x),\quad \varphi(x),\psi(x)\in C_0^\infty((0,\pi)),$$
$$u\big|_{x=0}=u\big|_{x=\pi}=0 \quad \text{对 } t>0$$

的解, $u(x,t)\in C^2(\Pi)\cap C^1(\overline{\Pi})$ 且对所有 $t>t^*u(x^*,t)=0, t^*>0$ 为常数, $\dfrac{x^*}{\pi}$ 是无理数. 在 $\Pi$ 中 $u(x,t)\equiv 0$ 是否成立? 说明理由.

**4.** **a)** (1) 写出二维空间变量情形波动方程柯西问题解的泊松公式.

**b)** (2) 证明: 泊松公式所确定的函数当 $t=0$ 时满足初始条件.

**5.** (3) 设给定在球

$$Q_1=\{x\in\mathbb{R}^3, |x|<1\}$$

内的函数 $u(x)$ 满足方程

$$\Delta u=\lambda u \quad (\lambda<0 \text{ 为常数}),$$

且在半径为 $\delta$ 的球 $Q_\delta=\{x\in\mathbb{R}^3, |x|<\delta\}$ 内 $u(x)\equiv 0$, 其中 $0<\delta<1, \delta$ 为常数. 证明在 $Q_1$ 内 $u\equiv 0$.

**6.** (2) 设 $Q$ 是边界 $\partial Q$ 为 $C^1$ 类的有界区域. 边值问题

$$\Delta u-u=1 \quad \text{在 } Q \text{ 内},\quad u\in C^2(Q)\cap C^1(\overline{Q}),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial Q}=0$$

($\vec{n}$ 是 $\partial Q$ 的外法线方向) 的解是否可能在 $Q$ 内严格为正? 说明理由.

**7.** (3) 设 $Q=\{x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2, |x|<1\}$ 是单位圆,

$$Q_+\equiv Q\cap\{x_1>0\},\quad Q_-\equiv Q\cap\{x_1<0\}$$

且函数 $u(x)\in H^1(Q)$ 属于 $C^\infty(\overline{Q}_+)$ 类及 $C^\infty(\overline{Q}_-)$ 类. 证明函数 $u(x)$ 在 $Q$ 内连续.

**8.** (3) 设非负有界函数满足方程

$$u_t = \Delta u \quad \text{在带形 } (0,1)\times\mathbb{R}^3,$$
$$u(t,x)\equiv 0 \quad \text{在方体 } (0,1)\times(0,1)\times(0,1)\times(0,1).$$

在带形 $(0,1)\times\mathbb{R}^3$ 是否成立 $u\equiv 0$? 说明理由.

**评分标准:** 当满分为 25 分时, 18 分以上为 "优秀", 12 分以上为 "良好", 8 分以上为 "及格". 考试时间为 3 小时.

## 2000 年, 数学组, 第二次补考

**主讲人: A. C. 沙玛耶夫**

**1.** **a)** (1) 叙述弗里德里希斯不等式.

**b)** (3) 对平面上的无界区域 $\Omega=\{(x,y): x>0, y>0\}$ 弗里德里希斯不等式是否成立? 如果成立, 给予证明; 如果不成立, 举出反例.

**2.** (3) 在平面区域 $\Omega=\{(x,y): 0<x^2+y^2<1\}$ 内考虑如下边值问题:

$$\Delta u(x,y)=0 \quad \text{在 } \Omega \text{ 内},$$
$$u(x,y)=\varphi(x,y) \quad \text{当 } x^2+y^2=1,$$

其中 $\varphi(x,y)$ 是给定的连续函数,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)u(x,y)=a,$$

其中 $a$ 是给定的常数. 这样的问题是否有解? 如果有解是否唯一? 说明理由.

**3.** (3) 设 $u(t,x)$ 是如下问题的解:

$$u_{tt}=u_{xx} \quad \text{在平面上的带形 } \Pi\equiv[0,+\infty)\times[0,1] \text{ 内},$$

$x\in[0,1], t\in[0,+\infty), u\in C^2(\Pi)$, $u\big|_{x=0}=\varphi(t)$, $u\big|_{x=1}=0$, $u\big|_{t=0}=u_t\big|_{t=0}=0$ 对所有 $x\in[0,1]$. $|\varphi(t)|<\varepsilon$, $\varepsilon$ 是给定的数, $\varphi(t)$ 是光滑函数. 是否可以选择函数 $\varphi(t)$, 使得给定问题的解 $u(t,x)$ 是 $\Pi$ 上的无界函数? 说明理由.

**4.** (3) 设 $\Omega$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域, $u(x)$ 是 $\Omega$ 上满足方程

$$\Delta u - u = 0 \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}$$

的 $C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ 类函数. 证明: 如果在 $\partial\Omega$ 上 $u=0$, 那么在 $\Omega$ 内 $u\equiv 0$.

**5.** **a)** (2) 证明: $\mathring{H}^1([0,1])$ 的任何函数都是连续函数.

**b)** (3) 是否任何在闭区间 $[0,1]$ 上连续且有 $u(0)=u(1)=0$ 的函数 $u(x)$ 都属于 $\mathring{H}^1([0,1])$? 说明理由.

**6.** (3) 求算子

$$\mathcal{L} \equiv \frac{d^2}{dx^2} + 2\frac{d}{dx} - 1$$

的基本解, 即求这样的函数 $u(x)$ 使得在 $\mathbb{R}^1$ 中

$$u'' + 2u' - u = \delta_0(x),$$

其中 $\delta_0(x)$ 是 "$\delta$ 函数":

$$\langle \delta_0(x), \varphi \rangle = \varphi(0), \quad \forall \varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1).$$

这样的解是否是唯一的?

**7.** (3) 设

$$T \equiv \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

是热传导方程的算子. 证明: 函数

$$\mathcal{E}(t,x) \equiv \frac{\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

在广义函数论意义下满足方程

$$T\mathcal{E}(t,x) = \delta_0(t,x),$$

其中当 $t<0$ 时 $\theta(t)=0$, 当 $t \geqslant 0$ 时 $\theta(t)=1$.

**评分标准:** 当满分为 24 分时, 17 分以上为 "优秀", 12 分以上为 "良好", 8 分以上为 "及格". 考试时间为 3 小时.

## 2001 年, 数学组, 提前考试

**主讲人: A. C. 沙玛耶夫**

**1.** **a)** (1) 给出二阶微分算子的特征曲面的定义.

**b)** (1) 对算子

$$\mathcal{L}u \equiv u_{tt} + 3u_x - 2u_{xx}, \quad \mathcal{L} \equiv u_t - 3u_{xx} + xu_x$$

在 $(x,t)$ 平面上构造其特征线的集合.

**2.** **a)** (2) 设 $u(t,x)$ 是问题

$$u_{tt}=u_{xx},\quad t>0,\ x>0,$$
$$u\big|_{x=0}=0,\quad u\big|_{t=0}=\varphi(x),\quad u_t\big|_{t=0}=0$$

的解, 其中 $\operatorname{supp}\varphi(x)\subset(0,\infty),\varphi(x)\in C^2((0,\infty))$. 已知存在 $T>0$ 使得当 $t>T,x\in(0,\infty)$ 时 $u(t,x)$ 是无限光滑的函数. $\varphi(x)$ 也是无限光滑的函数这一说法是否成立? 说明理由.

**b)** (2) 设 $u(t,x)$ 是问题

$$u_t=u_{xx},\quad t>0,\ x>0,$$
$$u\big|_{x=0}=0,\quad u\big|_{t=0}=\varphi(x)$$

的解, 其中 $\varphi(x)$ 与上一小题 a) 具有同样性质, 且 $|\varphi|\leqslant M$. 已知存在 $T>0$ 使得当 $t>T,x\in(0,\infty)$ 时 $u(t,x)$ 是无限光滑的函数. $\varphi(x)$ 也是无限光滑的函数这一说法是否成立? 说明理由.

**3.** (3) 设 $K=\{(x,y)\big|x^2+y^2<1\}$ 是平面 $(x,y)$ 上的单位圆, $u(x,y)$ 是问题

$$\Delta u=x^2y,\quad u\big|_{\partial K}=0$$

的解, 求 $u(0,0)$.

**4.** (2) 证明空间 $H^1(\Omega)$ 的完备性.

**5.** (4) 在空间 $\mathring{H}^1((-1,1))$ 中考虑满足条件

$$\varphi'(0)+\alpha\varphi(0)=0$$

的光滑的具有紧支集的函数 $\varphi(x)$ 的集合 $A$, 其中 $\alpha\in\mathbb{R}$. 求集合 $A$ 的闭包 $\bar{A}$ 在 $\mathring{H}^1((-1,1))$ 中的余维数.

**6.** (4) 设 $\mu_i(x),u_i(x)$ $(i=1,2,\cdots)$ 分别是施图姆 – 刘维尔问题

$$\mathcal{L}u_i=\mu_iu_i,\quad u_i(0)=u_i(1)=0,\quad \|u_i\|_{L_2((0,1))}=1,$$
$$\mathcal{L}\equiv\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right)-q(x)$$

的本征值与本征函数, 其中 $p(x),q(x)$ 是满足估计 $p(x),q(x)\geqslant\alpha>0$, $\alpha$ 为常数, 的光滑函数. 证明不等式

$$\sup_{x\in[0,1]}|u_i(x)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{|\mu_i|}.$$

**7.** (3) 设 $\mathbb{R}^n$ 中调和函数序列 $\{u_n(x)\}$ 当 $n\to\infty$ 时弱收敛于函数 $u^*(x)\in L^2_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$, 即 $\forall\varphi\in D(\mathbb{R}^n)$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}u_n(x)\varphi(x)dx\xrightarrow[n\to\infty]{}\int\limits_{\mathbb{R}^n}u^*(x)\varphi(x)dx.$$

PDG

说 $u^*(x)$ 是调和函数是否成立? 说明理由.

**8.** (3) 设 $\varphi(x) \in L_2(\mathbb{R}^1) \cap C(\mathbb{R}^1)$. 证明, 热传导方程柯西问题

$$u_t = u_{xx}, \quad t > 0, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in (-\infty, \infty)$$

的解当 $t \to \infty$ 时关于 $x \in (-\infty, \infty)$ 一致地趋于零.

**评分标准:** 当满分为 25 分时, 18 分以上为 "优秀", 12 分以上为 "良好", 8 分以上为 "及格". 考试时间为 3 小时.

## 2001 年, 数学组, 正常考试

### 主讲人: A. C. 沙玛耶夫

**1.** (2) 设 $u(t,x) (x \in \mathbb{R}^3)$ 是波动方程柯西问题

$$u_t = \Delta u \quad \text{在 } (0, +\infty) \times \mathbb{R}^3 \text{ 中, 及}$$
$$u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = \varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$$

的解, $u \in C^2((0, +\infty) \times \mathbb{R}^3) \cap C^1([0, +\infty) \times \mathbb{R}^3)$. 如果

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \varphi(x) dx \neq 0,$$

函数 $u(t,x)$ 的支集是否可能位于柱体 $\{|x| < R\} \times [0, +\infty)$ 之内?

**2.** (3) 证明: 构建在有界曲面 $S \in C^1$ 上、具有连续密度的双层势在无穷远处如 $\dfrac{1}{r^2}$ 那样减少, 其中 $r$ 是到某个固定点 $O \in S$ 的距离.

**3.** (3) 设 $\Pi = \{(x,y) | 0 < x < a, 0 < y < b\}$ 是平面上的矩形, 以及 $C > 0$ 是某个常数, 使得 $\forall u(x,y) \in \mathring{H}^1(\Pi)$ 成立弗里德里希斯不等式

$$\int\limits_{\Pi} u^2 dxdy \leqslant C \int\limits_{\Pi} |\nabla u|^2 dxdy.$$

证明: $C \geqslant \dfrac{a^2 b^2}{\pi^2 (a^2 + b^2)}$.

**4.** (3) 设

$$\mathcal{L} \equiv a \frac{d^2}{dx^2} + b \frac{d}{dx} + c$$

是微分算子. 对哪些 $a, b, c \in \mathbb{R}^1$ 存在方程

$$\mathcal{L} u(x) = \delta(x)$$

的在 $\mathbb{R}^1$ 上的连续解? 其中 $\delta(x)$ 是 $\delta$ 函数 (即 $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0), \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$).

**5.** (3) 设 $u(x) \in H^1((-\infty,+\infty))$, 即 $u(x) \in L_2(\mathbb{R}^1)$ 且存在索伯列夫意义下的广义导数 $u_x(x) = v(x) \in L_2(\mathbb{R}^1)$. 证明: $u(x)$ 是连续函数且如果 $|x| \to \infty$ 则 $u(x) \to 0$.

**6.** (3) 设 $K = \{(r,\varphi)|0 < r < 1, 0 < \varphi < \frac{\pi}{6}\}$ 是开度为 30° 的圆扇形, $u(r,\varphi)$ 是 $K$ 中调和函数, 它属于 $C^1(\overline{K})$. 证明:

$$|u(r,\varphi)| \leqslant Cr^6,$$

其中 $C > 0$ 是某个常数.

**7.** (3) 是否对每一个 $\alpha \in \mathbb{R}^1$, 问题

$$\Delta u = 1 \quad 在\ K = \{(r,\varphi)|1 < r < 2\}\ 内,$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{r=1} = \sin\varphi, \quad \left.\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u\right)\right|_{r=2} = \sin^2\varphi, \quad u \in C^2(K) \cap C^1(\overline{K})$$

至少有一个解? ($\vec{n}$ 是环形边界 $K$ 的外法线方向向量.)

**8.** (4) 在球 $\{|x| < 1\}, x \in \mathbb{R}^3$ 中构造调和函数 $u(x)$ 为有界的实例, 使得 $|\nabla u|$ 在 $\{|x| < 1\}$ 中无界.

**9.** (4) 证明 (利用泊松积分): 存在如下问题的解 $u(t,x) \in C^2(\{t > 0\} \times \mathbb{R}^1_x)$ :

$$u_t = u_{xx} \quad 在\ \{t > 0\} \times \mathbb{R}^1_x\ 内, 且当\ t \to 0\ 时 \quad u(t,x) \to \varphi(x) \quad 在\ L_2(\mathbb{R}^1_x) 内,$$

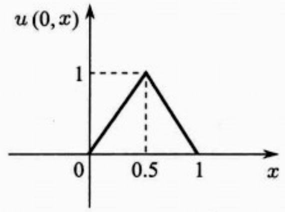
其中 $\varphi(x)$ 是 $L_2(\mathbb{R}^1_x)$ 中给定的函数. (不一定连续!)

**评分标准:** 当满分为 28 分时, 20 分以上为 “优秀”, 14 分以上为 “良好”, 9 分以上为 “及格”. 考试时间为 3 小时.

## 2001 年, 数学组, 考试

### 主讲人: A. C. 沙玛耶夫

**1.** (2) 两端为无穷长的弦在初始时刻偏离状态的截面形状如下图:




其初始速度等于零. 函数 $u(t,x)$ 满足方程

$$u_{tt} = u_{xx}.$$

画出函数 $u\left(\frac{1}{4}, x\right)$ 的图像.

**2.** (3) 证明: 如果由李雅普诺夫闭有界曲面给定的单层势在这个曲面外等于 0, 那么势的密度是零 (假设密度是连续的).

**3.** (3) 考虑 $\mathbb{R}^2_{x,y}$ 的带形 $\Pi = [0, y_0] \times \mathbb{R}^1_x$ 中的柯西问题

$$\Delta u + u = 0 \quad \text{在 } \Pi \text{ 内}, \quad u \in C^2(\Pi) \cap C^1(\overline{\Pi}),$$
$$u\big|_{y=0} = \varphi(x), \quad u_y\big|_{y=0} = \psi(x),$$

$\varphi(x), \psi(x)$ 是 $\mathbb{R}^1_x$ 中的有界连续函数. 这个问题在空间偶

$$E_1 = C(\mathbb{R}^1_x) \times C(\mathbb{R}^1_x), \quad E_2 = C(\Pi), \quad (\varphi, \psi) \in E_1, \quad u \in E_2$$

中是适定的吗? 如果是, 给予证明; 如果不是, 举出反例.

**4.** (3) 对给定在上一题带形 $\Pi$ 中的调和函数, 极值原理是否成立? 如成立, 给出证明; 如不成立, 举出反例.

**5.** (3) 对哪些 $a \in \mathbb{R}^1$, 边值问题

$$\Delta u + 2u = x - a \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}, \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0,$$

$\Omega = \{(0, \pi) \times (0, \pi)\}$, 至少有一个解? 说明理由.

**6.** (4) 考虑边值问题

$$u_{tt} = u_{xx} \quad \text{在 } [0, 1] \times (0, +\infty) \text{ 内},$$
$$u\big|_{x=0} = 0, \quad u_x\big|_{x=1} = f(t), u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x),$$

$\varphi(x), \psi(x)$ 是光滑的、具有紧支集的函数. 证明: 可以这样选择光滑函数 $f(t)$ 使得这个问题的解 $u(t, x)$ 是带形 $[0, 1] \times (0, \infty)$ 中的无界函数.

**7.** (4) 考虑边值问题

$$u_t = u_{xx} \quad \text{在 } [0, 1] \times (0, +\infty) \text{ 中},$$
$$u\big|_{x=0} = f(t), \quad u\big|_{x=1} = g(t), \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x),$$

$f, g, \varphi$ 是光滑函数, 同时

$$\text{当 } t \to \infty \text{ 时 } f(t) \to a, \quad \text{当 } t \to \infty \text{ 时 } g(t) \to b.$$

这个问题的解 $u(t, x)$ 当 $t \to \infty$ 时在空间 $C([0, 1])$ 中的极限 (如果这样的极限一般是存在的话) 是什么? 说明理由.

**8.** (4) 在平面 $\mathbb{R}^2$ 上构造区域 $\Omega$ 的例子, 使得在空间 $H^1(\Omega)$ 中 $C^\infty(\overline{\Omega})$ 函数不构成处处稠密的集合, 即 $\overline{C^\infty(\overline{\Omega})} \neq H^1(\Omega)$.

**评分标准:** 当满分为 26 分时, 18 分以上为 "优秀", 13 分以上为 "良好", 8 分以上为 "及格". 考试时间为 3 小时.

PDG

## 2001 年, 数学组, 第二次补考

**主讲人: A. C. 沙玛耶夫**

**1.** **a)** (1) 叙述柯瓦列夫斯卡娅关于解析解的存在与唯一性的定理.

**b)** (3) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的区域且

$$\Delta^2 u = 0 \quad \text{在 } \Omega \text{ 内},$$

$u(x) \in C^4(\Omega)$. 证明: $u(x)$ 是实解析函数.

**2.** (3) 设

$$u_t = u_{xx} \quad \text{在带形 } \Pi = (0,T) \times \mathbb{R}^1_x \text{ 内}, \quad u \in C^2(\Pi) \cap C(\overline{\Pi}),$$
$$u\big|_{t=0} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^1_x \quad \text{且 } |u(t,x)| \leqslant C|x|.$$

证明在 $\Pi$ 内 $u \equiv 0$.

**3.** **a)** (1) 给出空间 $H^1(\Omega)$ 的定义.

**b)** (3) 设 $u(x)$ 是单位球 Ш$= \{|x| < 1\}$ 中的有界函数,$x \in \mathbb{R}^3$, 它在 Ш$\diagdown\{0\}$ 中是光滑的. 是否可以断言 $u \in H^1$ (Ш)? 如果成立, 请给予证明; 如果不成立, 请举出反例.

**4.** (2) 在 $\mathbb{R}^2$ 中的方程

$$u_{tt} - u_{xx} = 0$$

是否有解 $u \in C^{2001}(\mathbb{R}^2)$, 但 $u \notin C^{2002}(\mathbb{R}^2)$?

**5.** (3) $\mathbb{R}^3$ 中的单位球面均匀地具有常密度 $Q$ (单层势). 求球面内与球面外的势.

**6.** (4) 设函数 $u(x), x \in \mathbb{R}^3$, 满足方程

$$\Delta u = u(x) \quad \text{在 } \mathbb{R}^3 \text{ 内},$$

并且有估计

$$|u(x)| \leqslant C, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

证明在 $\mathbb{R}^3$ 中 $u \equiv 0$.

**7.** (4) 设函数 $y(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, 并且作为广义函数满足方程 $y' = y$. 证明:$y(x)$ 是对应于 $Ce^x$ 的正则广义函数, 其中 $C$ 为常数.

**8.** (3) 设 $\Omega$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中含于带形 $[0,1] \times \mathbb{R}^1$ 中的任意区域. 对 $\Omega$ 证明弗里德里希斯不等式

$$\int_\Omega u^2 dxdy \leqslant \int_\Omega |\nabla u|^2 dxdy, \quad u \in \mathring{H}^1(\Omega).$$

**评分标准:** 当满分为 27 分时, 19 分以上为 "优秀", 13 分以上为 "良好", 9 分以上为 "及格". 考试时间为 3 小时.

## 2002 年, 数学组, 提前考试

### 主讲人: A. C. 沙玛耶夫

1. a) (1) 给出空间 $H^1(\Omega)$ 的定义.
   b) (2) 对哪些 $\alpha > 0$ 函数 $\sin^\alpha x$ 属于 $H^1([0,\pi])$? 说明理由.
2. (3) 设 $u(x,t)$ 是如下热传导方程的解:
$$u_t = u_{xx} \quad \text{在带形 } \Pi = [0,1]\times\mathbb{R}_+ \text{ 内},$$
$\mathbb{R}_+ \equiv \{t>0\}, u \in C^2(\Pi)\cap C^1(\overline{\Pi})$, $u(x,t)$ 满足边界条件
$$u_x\big|_{x=0} = 1, \quad u_x\big|_{x=1} = -1$$
及初始条件
$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \varphi(x)\in C_0^\infty((0,1)).$$
这个解在 $\Pi$ 上是否有界? (即温度是否增长?) 说明理由.
3. (4) 设 $u(x,y)$ 是 $(x,y)$ 平面上半带形 $\Pi = (0,1)\times\mathbb{R}_+$ 内拉普拉斯方程的解, $\mathbb{R}_+ \equiv \{y>0\}, u(x,y)\in C^2(\Pi)\cap C(\overline{\Pi})$ 满足边界条件
$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=1} = 0, \quad y>0,$$
并且当 $y\to+\infty$ 时 $u(x,y)\to 0$ 对 $x$ 一致地成立. 证明:
$$|u(x,y)| \leqslant Ce^{-3.14\cdot y},$$
其中 $C>0$ 是某个常数.
4. (4) 设 $u(x,y)$ 是半平面 $P=\{y>0\}$ 中的调和函数,
$$|u(x,y)|\leqslant M, \quad x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}_+ \quad \text{且 } u\big|_{y=0} = 0, \quad \forall x\in\mathbb{R}_x^1,$$
$u\in C(\overline{P})$, 其中 $M$ 是某个常数. 证明: 在 $P$ 中 $u\equiv 0$.
5. (3) 考虑波动方程在特征 $\{t=x\}$ 上具有数据的柯西问题
$$u_{tt} = u_{xx} \quad \text{在 } (x,t) \text{ 平面上},$$
$$u\big|_{t=x} = \varphi(x) \quad u_x\big|_{t=x} = \psi(x).$$
想出使此柯西问题无解的光滑函数 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$.
6. (3) 问题
$$u_t = u_{xx} \quad \text{在 } \Pi = (0,1)\times\mathbb{R}_x^1 \text{ 内}, \quad u\in C^2(\Pi)\cap C(\overline{\Pi}), \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x)$$

($\varphi(x)$ 是已知函数) 在空间偶 $(E_0, E_1)$ 中是否适定? 其中

$$E_0 = C(\mathbb{R}_x^1) \cap B(\mathbb{R}_x^1), \quad E_1 = C^2(\Pi) \cap C(\overline{\Pi}) \cap B(\Pi)$$

具有范数

$$\|\varphi\|_{E_0} = \sup_{\mathbb{R}_x^1} |\varphi(x)|, \quad \|u\|_{E_1} = \sup_{(x,t)\in\Pi} |u(x,t)|.$$

说明理由.

**7.** **a)** (1) 给出单层势的定义.

**b)** (3) 证明: 当 $r \to \infty$ 时, 单层势如同 $\dfrac{C}{r}$ 那样递减, 其中 $r$ 是流动点到曲面 $S$ 的距离, $S$ 是有界曲面.

**评分标准:** 当满分为 24 分时, 17 分以上为 "优秀", 12 分以上为 "良好", 8 分以上为 "及格". 考试时间为 3 小时.

## 2002 年, 力学组, 正常考试

**主讲人: A. C. 沙玛耶夫**

**试卷 1, 第一部分**

**(1.5 小时)**

**1.** (2) 解边值问题

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad t < 2x, \ x > 0,$$
$$u\big|_{t=2x} = \sin x, \quad x > 0, \quad u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = 1.$$

**2.** (2) 在环 $K = \{1 < |x| < 3\}$ 内求解狄利克雷问题

$$\Delta u = 0 \quad 在\ K\ 内, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial r} + u\right)\bigg|_{r=1} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=3} = 2,$$

$r$ 是径向坐标.

**3.** (2) 给定波动方程的柯西问题

$$u_{tt} = \Delta u(t,x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \ t > 0,$$
$$u\big|_{t=0} = (1 + |x|^2)^{-1}, \quad u_t\big|_{t=0} = \sin |x|.$$

求出 $u(10,0,0,0)$ 的值.

**试卷 1, 第二部分**

**(1.5 小时)**

1. **a)** (1) 叙述热传导方程的极值原理.
   **b)** (1) 叙述调和函数的平均值定理.
2. (2) 在广义函数类中至少求出方程

$$u'' + u = \delta_0'$$

的一个解.

3. (2) 定义单层势并证明单层势在无穷远处如同 $\dfrac{C}{|x|}$ 那样递减.
4. (3) 如下的狄利克雷外问题

$$\Delta u = 0 \quad 在\ \mathbb{R}^3 \diagdown \Omega\ 中, \quad u\big|_{\partial\Omega} = \varphi(x), \varphi(x) \in C(\partial\Omega),$$
$$\int\limits_{\mathbb{R}^3 \diagdown \Omega} (1 + |x|) u^2(x) dx < \infty$$

是否唯一? 说明理由.

5. (3) 证明弗里德里希斯不等式. 设 $\Omega_1$ 与 $\Omega_2$ 是两个有界区域并且 $\Omega_1$ 的体积大于 $\Omega_2$ 的体积. 是否可以据此来比较对于两个区域中弗里德里希斯不等式中的常数的大小? 说明理由.

**试卷 2, 第一部分**

**(1.5 小时)**

1. (2) 解边值问题

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad x > 0,\ t > 0,$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + 2u\right)\bigg|_{x=0} = \sin t,\ t > 0, \quad u\big|_{t=0} = u_t\big|_{t=0} = 0.$$

2. (2) 解边值问题

$$u_t = u_{xx}, \quad 当\ 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\pi} = 1, \quad u\big|_{t=0} = 0.$$

3. (2) 设 $u(t,x), x \in \mathbb{R}^3, t > 0$, 是柯西问题

$$u_{tt} = \Delta u, \quad t > 0, \quad u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = \varphi(x)$$

的解, 其中当 $q \leqslant |x| \leqslant 10$ 时 $\varphi(x) = 0$, 对其余的 $x \in \mathbb{R}^3$ 的值 $\varphi(x) > 0$. 对某个 $x \in \mathbb{R}^3$, 对哪些 $t > 0$ 的变量值, 等式 $u(t,x) = 0$ 是可能的? 说明理由.

## 试卷 2, 第二部分

**(1.5 小时)**

**1.** **a)** (1) 给出二阶偏微分方程的特征曲面的定义.
**b)** (1) 所提边值问题适定是什么意思?

**2.** (2) 在广义函数类中至少求方程

$$u''' + u = \delta(t)$$

的一个解.

**3.** (2) 证明: 在点 $x$ 由曲面 $S$ 给定的、具有单位密度的双层势等于曲面 $S$ 对该点所张的立体角.

**4.** (3) 叙述并证明调和函数的刘维尔定理. 如果所论的调和函数不是给定在整个空间 $\mathbb{R}^3$, 而是给定在半空间 $\{x_1 > 0\}$ 中, 这个定理是否成立? 而如果再补充已知 $u(0, x_2, x_3) = 0$ 呢? 说明理由.

**5.** (3) 给出空间 $H^1(\Omega)$ 及 $\mathring{H}^1(\Omega)$ 的定义. 证明: 这两个空间不重合. 设 $u(x) \in C^\infty(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ 且在 $\partial\Omega$ 上 $u(x) = 0$. 是否有 $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$? 说明理由.

## 试卷 3, 第一部分

**(1.5 小时)**

**1.** (2) 求解边值问题

$$\begin{gathered} u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad x > 0, \quad t > 0, \\ u\big|_{t=0} = u_t\big|_{t=0} = 0, \quad (u_x + (\sin t)u)\big|_{x=0} = \sin t, \quad t > 0. \end{gathered}$$

**2.** (2) 设 $u(t, x), x \in \mathbb{R}^2$, 是柯西问题

$$u_t = \Delta u(t, x), \quad u\big|_{t=0} = \begin{cases} 1, & |x| < L, \\ 0, & |x| \geqslant L, \end{cases} \qquad L > 0 \text{ 为常数}$$

的解. 求 $u(10, 0, 0)$.

**3.** (2) 求解边值问题

$$\begin{gathered} u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad u_x\big|_{x=\pi} = \sin t, \quad u\big|_{t=0} = u_t\big|_{t=0} = 0. \end{gathered}$$

### 试卷 3, 第二部分

**(1.5 小时)**

**1. a)** (1) 叙述在区域中调和函数的严格极大值原理.

**b)** (1) 叙述热传导方程柯西问题的唯一性定理.

**2.** (2) 在广义函数类中至少求出方程

$$u' + \sin t \cdot u = \delta_0$$

的一个解.

**3.** (2) 证明: 如果 $S$ 是李雅普诺夫曲面, 对 $x \in S$, 曲面 $S$ 的双层势是确定的.

**4.** (3) 调和函数 $u(x_1, x_2, x_3)$ 定义在半柱体

$$\Pi \equiv \{x_1^2 + x_2^2 < 1\} \times \{x_3 > 0\}$$

内, 当 $x_1^2 + x_2^2 = 1$ 时 $u = 0$. 已知 $u \in C^1(\overline{\Pi})$ 并且当 $x_3 \to +\infty$ 时 $u(x) \to 0$ 对 $x_1$ 与 $x_2$ 一致地成立. 证明: 成立如下估计:

$$|u(x)| \leqslant C \exp\left(-\frac{\pi}{\sqrt{2}} x_3\right),$$

其中 $C > 0$ 是某个常数.

**5.** (3) 给出空间 $H^1(\Omega)$ 的定义并证明其完备性. 设 $\Omega$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域, $C^\infty(\overline{\Omega})$ 是 $\Omega$ 内具有所有各阶导数并可连续延拓到 $\overline{\Omega}$ 上的光滑函数的集合. 这个集合是否总是在 $H^1(\Omega)$ 中稠密? 说明理由.

**评分标准:** 当满分为 18 分时, 12 分以上为 "优秀", 9 分以上为 "良好", 6 分以上为 "及格".

## 2001 年, 数学组, 正常考试

### 主讲人: T. A. 沙波什尼柯娃

### 第一部分

**(1.5 小时)**

**1. a)** (1) 求方程

$$5u_{xx} - 4u_{xy} - u_{yy} = 0 \qquad (*)$$

的通解.

**b)** (2) 求方程 $(*)$ 满足条件

$$u(x,0) = 7x^2, \quad u\left(x, \frac{x}{8}\right) = x^2$$

的解.

**2.** (2) 求解柯西问题

$$u_{tt} = \Delta u - |x|, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0; \quad u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = \sin|x|.$$

**3.** (2) 在圆 $Q = \{x^2 + y^2 + 2x < 0\}$ 内解狄利克雷问题

$$\Delta u = 0 \quad \text{在 } Q \text{ 内}, \quad u\big|_{\partial Q} = 4x^3 + 6x - 1.$$

**4.** **a)** (2) 求柯西问题

$$u_t = \Delta u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0; \quad u\big|_{t=0} = e^{-|x|^2}$$

的解.

**b)** (2) 求 $\lim\limits_{|x|\to\infty} u(x,t)$. 说明理由

**5.** **a)** (2) 求解问题

$$u_t = u_{xx} - 7, \quad x \in (0,\pi), \quad t > 0;$$
$$u\big|_{x=0} = 1, \quad u_x\big|_{x=\pi} = 0; \quad u\big|_{t=0} = 0.$$

**b)** (2) 求 $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t)$. 说明理由.

**第二部分**

**(1.5 小时)**

**1.** (3) 设 $\Omega = \{(x,t)|0 < x < \pi, 0 < t < +\infty\}, u \in C^2(\overline{\Omega})$,

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad \text{在 } \Omega \text{ 内},$$
$$u\big|_{x=0} = 0, \quad u_x\big|_{x=\pi} = f(t); \quad u\big|_{t=0} = u_t\big|_{t=0} = 0;$$
$$f \in C^\infty([0,+\infty)), \quad f(0) = 0, \quad \sup_{[0,\infty)} |f(t)| < +\infty.$$

问

$$\sup_{\overline{\Omega}} |u(x,t)| < +\infty$$

是否成立? 说明理由.

**2.** **a)** (3) 当 $x$ 位于闭曲面 $\Gamma = \partial\Omega$ 外时, 即对于 $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$, 具有密度 $\sigma_0(x)$ 的双层势等于零. 在 $\Gamma$ 上 $\sigma_0(x) \equiv 0$ 是否成立? 说明理由.

**b)** (3) 当 $x$ 位于闭曲面 $\Gamma$ 外时, 密度为 $\mu_0(x)$ 的单层势等于零. 在 $\Gamma$ 上 $\mu_0(x) \equiv 0$ 是否成立?

**3.** (2) 求方程组

$$\dot{y} = Ay + b\delta(x); \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

在 $\mathcal{D}'^2$ 中任何一个解.

**4.** (3) 设 $u(x,y)$ 是半平面 $\Pi = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$ 上的有界调和函数, $u \in C(\overline{\Pi})$. 证明:

$$\sup_{\overline{\Pi}} u = \sup_{\mathbb{R}^1} u(x,0).$$

**评分标准:** 当满分为 30 分时, 21 分以上为 "优秀", 16 分以上为 "良好", 8 分以上为 "及格".

## 2002 年, 数学组, 正常考试

**主讲人: T. A. 沙波什尼柯娃**

**试卷 1, 第一部分**

**(1.5 小时)**

**1.** (2) 求方程

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}$$

的与平面 $t=0$ 沿直线 $(l,x)=0$ 相交的特征, 其中 $l=(l_1,l_2) \neq 0$.

**2.** (2) 在矩形 $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$ 中求解其边界条件为

$$u\big|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=a} = 0; \quad u\big|_{y=0} = 0, \quad u\big|_{y=b} = \sin\frac{5x\cdot\pi}{2a}$$

的拉普拉斯方程的边值问题.

**3.** (2) 设 $u(t,x)$ 是柯西问题

$$u_{tt} = \Delta u, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0;$$
$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x)$$

的解. 函数 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 仅在矩形 $x_1 \in [0,a], x_2 \in [0,b]$ 中是已知的. 在什么区域可以确定 $u(t,x), t>0$? 在 $\mathbb{R}^3_{t,x_1,x_2}$ 中画出这个区域.

**4.** (2) 求解问题

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in (0,l), \quad t > 0;$$

$$u\big|_{t=0} = 0; \quad u\big|_{x=0} = A_1, \quad u\big|_{x=l} = A_2, \quad t > 0, \quad A_1 \text{ 与 } A_2 \text{ 为常数}.$$

求 $\lim\limits_{t\to\infty} u(t,x)$.

## 试卷 1, 第二部分

**(1.5 小时)**

**1.** (4) 设 $\Omega=\{(x_1,x_2)|0<x_j<1,\ j=1,2\}$. 证明: 对于满足条件

$$\int\limits_{\Omega}\sin\pi x_1\cdot\sin\pi x_2\cdot v(x_1,x_2)dx_1dx_2=0$$

的任意函数 $v\in\mathring{H}^1(\Omega)$ 成立不等式

$$\|v\|^2_{L_2(\Omega)}\leqslant\frac{1}{5\pi^2}\|\nabla v\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

**2.** (3) 求以常密度 $\mu$ 展布于柱面 $\{x_1^2+x_2^2=R^2,0\leqslant x_3\leqslant H\}$ 上, 在位于 $x_3$ 轴上点的单层势.

**3.** (3) 函数 $u(x,t)$ 在柱体 $Q_\infty=\Omega\times(0,\infty),x\in\Omega\subset\mathbb{R}^n,t>0;\overline{\Omega}\subset\{|x_j|<\frac{\pi}{8},\ j=1,\cdots,n\}$ 内满足热传导方程

$$u_t=\Delta u;$$
$$u=0\quad 在\ \partial\Omega\times(0,\infty)\ 上;$$

$u\in C^{2,1}(Q_\infty)\cap C(\overline{Q}_\infty)$. 证明:

$$|u|\leqslant C_0e^{-4nt},\quad C_0>0\ 为常数.$$

**4.** (2) 在 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ 中求方程组

$$\dot{x}=x-y,\quad \dot{y}=y-4x+3\delta(t)$$

的任何一个解.

## 试卷 2, 第一部分

**(1.5 小时)**

**1.** (2) 对哪些值 $a\in\mathbb{R}^1$, 平面 $y+z=C$ ($C$ 为常数) 是方程

$$u_{xx}-2au_{xy}+u_{yy}-a^2u_{zz}+u=0$$

的特征? 说明理由.

**2.** (2) 求解问题

$$u_{tt}=\Delta u,\quad 0<x,y<1,t>0;$$
$$u\big|_{x=0}=u\big|_{x=1}=u\big|_{y=0}=u\big|_{y=1}=0;$$
$$u\big|_{t=0}=\sin 3\pi x\sin 7\pi y,\quad u_t\big|_{t=0}=-2\sin\pi x\sin 4\pi y.$$

**3.** (2) 设 $u(t,x)$ 是柯西问题

$$u_{tt} = \Delta u, \quad x = (x_1, x_2, x_3), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0;$$
$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x)$$

的解. 函数 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 仅在球层 $1 \leqslant |x| \leqslant 2$ 中是已知的. 在什么区域可以得知解 $u(t,x)$? 说明理由.

**4.** (2) 解柯西问题

$$u_t = \frac{1}{4}u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad t > 0; \quad u\big|_{t=0} = e^{-x^2+2x}, \quad x \in \mathbb{R}^1.$$

**试卷 2, 第二部分**

**(1.5 小时)**

**1.** (4) 求

$$\inf_M \left\{ \int_\Omega (|\nabla u|^2 + 2u)dx + \int_{|x|=1} u^2 dS \right\},$$

其中 $\Omega = \{1 < |x| < 2\}, x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; M = \{v \in H^1(\Omega) \big|$ 当 $|x| = 2$ 时 $v = 0\}$.

**2.** (3) 求以密度 $\mu = \sin^2\varphi$ 展布在柱面 $\{x_1^2 + x_2^2 = R^2, 0 \leqslant x_3 \leqslant H\}$ 上, 在位于 $x_3$ 轴上点的单层势.

**3.** (3) 设 $u(x), x \in \mathbb{R}^3$, 满足方程

$$\Delta u = u \quad \text{在 } \mathbb{R}^3 \text{ 内},$$

且有估计

$$|u| \leqslant C, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

证明: 在 $\mathbb{R}^3$ 内 $u \equiv 0$.

**4.** (2) 求方程

$$y'' + 4y' + 3y = -\delta(x)$$

在 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ 中的任何一个解.

**评分标准:** 当满分为 20 分时, 15 分以上为 “优秀”, 10 分以上为 “良好”, 6 分以上为 “及格”.

## 2002 年, 奥林匹克

### 主讲人: A. C. 沙玛耶夫

**1.** (2) 证明:

$$\Delta^2(|x|) = C_0\delta(x)$$

并求出常数 $C_0$. 这里 $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ 且 $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

**2.** (3) 设 $u(x,t)$ 是边值问题

$$u_{tt} = u_{xx} \quad \text{在 } (0,\pi)\times(0,+\infty) \text{ 内},$$
$$u\big|_{x=0} = f(t), \quad u\big|_{x=\pi} = 0, \quad u\big|_{t=0} = u_t\big|_{t=0} = 0$$

的解, $f(t)$ 是光滑函数且当 $t \to \infty$ 时 $f(t) \to 0, u \in C^2((0,\pi)\times(0,+\infty)) \cap C^1([0,1]\times[0,+\infty))$. 这个问题的解是否关于时间, 即关于变量 $t$ 无限地增长? 说明理由.

**3.** (2) 设 $u(t,x)$ 是热传导方程柯西问题

$$u_t = u_{xx}, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x)$$

的解, $\varphi(x) \in C(\mathbb{R}) \cap B(\mathbb{R})$. 对于固定的 $t$, 函数 $u(t,x)$ 是否是关于变量 $x$ 的实解析函数? 说明理由.

**4.** (3) 证明恒等式

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} = \int_0^1 G(x,x)dx,$$

其中 $\{\lambda_i\}$ 是在闭区间 $[0,1]$ 上施图姆 – 刘维尔问题的本征值序列, $G(x,y)$ 是其格林函数.

**5.** (3) 设 $\Omega$ 是平面上的有界区域, $u(x) \in C^2(\Omega)$,

$$\Delta u = 0 \quad \text{在 } \Omega \text{ 内},$$

$\varphi(x)$ 是 $\partial\Omega$ 上的连续函数并且除了唯一一点 $x^* \in \partial\Omega$ 外对所有 $x_0 \in \partial\Omega$ 成立

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\Omega}} u(x) = \varphi(x_0).$$

我们称这样的函数为 “除去一个边界点 $x^*$ 的狄利克雷问题 $\Delta u = 0, u\big|_{\partial\Omega} = \varphi(x)$ 的解”. 这样的狄利克雷问题的解是否是唯一的? 说明理由.

**6.** (2) 平面上柯西问题

$$\Delta u + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad x\in\mathbb{R}, \quad y>0,$$
$$u\big|_{y=0} = \varphi(x), \quad u_y\big|_{y=0} = \psi(x)$$

是否是适定的? 这里 $\varphi(x), \psi(x)$ 是连续有界函数, 解 $u(x, y)$ 被考虑为在空间 $C([0, y_0] \times \mathbb{R}_x) \cap B([0, y_0] \times \mathbb{R}_x)$ 中. 说明理由.

**7.** (3) 设 $u(t, x)$ 是 "挖去一点" 的半平面

$$\Pi \equiv \{t > 0\} \times \mathbb{R}_x \diagdown \{(1,0)\}$$

上的热传导方程的解且在 $\Pi$ 内 $|u(t,x)| < M$. 证明: 在点 $(1,0)$ 的奇性是可去的, 即可以在这个点补充定义函数 $u(t,x)$, 使其是热传导方程在 $\mathbb{R}_x \times \{t > 0\}$ 的解.

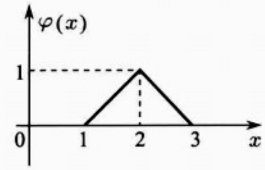
## 2003 年, 奥林匹克

**主讲人: A. C. 沙玛耶夫**

**1.** (2) 考虑半有界弦的混合问题

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad t > 0, x > 0,$$
$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\big|_{t=0} = 0, \quad (u_x + \alpha u)\big|_{x=0} = 0.$$

反射波是否有后波阵面, 即当 $t \to \infty$ 时从解的支集到直线 $x = 0$ 的距离是否无界增长?




**2.** (2) 考虑波动方程的柯西问题

$$u_{tt}(t,x) = \Delta u(t,x), \quad t > 0, \ x \in \mathbb{R}^3,$$
$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \quad u(t,x) \not\equiv 0.$$

$\operatorname{supp} u(t,x)$ 是否可能属于柱体 $\{(t,x) | t \in (0,\infty), x \in D\}$? 其中 $D$ 是空间 $\mathbb{R}^3$ 中的有界区域.

**3.** (3) 设 $u(x)$ 是空间 $\mathbb{R}^n$ 中点 $\{0\}$ 邻域中的调和函数;

$$u(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=i} \frac{D^\alpha u}{\alpha!}\bigg|_{x=0} x^\alpha$$

是函数 $u(x)$ 在点 $\{0\}$ 的泰勒级数展开. 多项式 $P_i(x) \equiv \displaystyle\sum_{|\alpha|=i} \frac{D^\alpha u}{\alpha!}\bigg|_{x=0} x^\alpha$ 是否是调和函数? 说明理由.

**4.** (3) 设 $u(t,x)$ 是热传导方程柯西问题

$$u_t = u_{xx} \quad \text{当 } t > 0,$$
$$u(t,x) \in C^2(\Pi_+) \cap C(\overline{\Pi}_+), \quad \Pi_+ \equiv \{(x,t), t > 0\},$$
$$u\big|_{t=0} = \varphi(x)$$

的解, $\varphi(x)$ 是不恒等于零的有界连续函数. 证明: 不存在这样的 $T > 0$ 使得对这样的 $T$, 如果 $T \leqslant t$ 时 $u(t,x) \equiv 0$. (换句话说, 被加热了的杆不可能在有限时间内完全 "变冷".)

**5.** (4) 设 $\Omega$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的有界区域, $u(x)$ 是狄利克雷问题的本征函数, 即

$$\Delta u(x) + \lambda u(x) = 0,$$
$$u(x) = 0 \quad \text{对 } x \in \partial\Omega, \quad \lambda \text{ 为常数}$$

集合 $\sigma = \{x \big| u(x) = 0, x \in \Omega\}$ 是否可能是与区域 $\Omega$ 边界没有公共点的直线 $\ell$ 上的一线段? 说明理由.

**6.** (6) 设 $K$ 是平面上中心在 $\{0\}$ 点的单位圆. 证明存在光滑函数序列 $\{\varphi_n(x)\}$, $\varphi_n(x) \in C^\infty(\overline{K})$, 使得

$$\big\|\varphi_n\big\|_{H^1(K)} \to 0 \quad \text{当 } n \to \infty,$$

但对任何 $n = 1, 2, \cdots, \varphi_n(0) = 1$(即 $H^1(K)$ 中的函数在该点没有 "痕迹").

**7.** (5) 设 Ш 是 $\mathbb{R}^3$ 中的单位球, 其中心在零点, $\overrightarrow{v}(x)$ 是 Ш 中这样的向量函数:

1) $\overrightarrow{v}(x) = \nabla u(x), u(x)$ 是在 Ш 中光滑的标量函数;

2) 在 Ш 中 $\operatorname{div} \overrightarrow{v}(x) = 0$;

3) 如果把 $\overrightarrow{v}(x)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中作零延拓, 那么由这样的延拓所得到的向量函数 $\overrightarrow{w}(x)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中在广义函数论意义下仍满足等式 $\operatorname{div} \overrightarrow{w}(x) = 0$.

求出 $\overrightarrow{v}(x)$.

**8.** (6) 设 $u(t,x)$ 是如下问题的解:

$$u_{tt} = u_{xx} \quad \text{在 } \Pi \text{ 内}, \quad \Pi \equiv [0,\pi] \times [0,\infty),$$
$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=\pi} = 0, \ \forall t > 0, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x),$$

$\psi(x), \varphi(x) \in C_0^\infty([0,\pi])$. 我们观察在点 1 这一点具有固定端的弦的运动, 即我们已知当 $t > 0$ 时的函数 $u(t,1)$, 但不是绝对准确, 而是准确到 $\delta$, 其中 $\delta$ 是任意正数 (但不等于零). 能否根据这一观察, 以任意预先给定的精确度 $\varepsilon > 0$ 来重建函数 $\psi(x)$ 与 $\varphi(x)$? 说明理由.

## 2004 年, 奥林匹克

### 主讲人: A. C. 沙玛耶夫

**1.** (2) 在 $\mathbb{R}^3$ 中考虑波动方程的柯西问题

$$u_{tt} = \Delta u, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u'_t\big|_{t=0} = 0,$$

其中

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & 当\ |x| \leqslant 1, \\ 0, & 当\ |x| > 1. \end{cases}$$

(球体 “爆炸”.) 在时刻 $t = 1, t = 3$ 画出 $u(t, r)$ (当然, 解仅依赖于 $r = |x|$).

**2.** (2) 函数 $u(x, t)$ 是边值问题

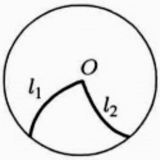
$$\ddot{u} + \dot{u} = u'' \quad 在\ [0, \pi] \times [0, \infty)\ 上,$$
$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=\pi} = 0, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u'_t\big|_{t=0} = \psi(x)$$

的解. 当 $t \to \infty$ 时 $|u(x, t)| \to 0$ 是否成立? 说明理由.

**3.** (5) 函数 $u(x, t)$ 是柱体 $\text{П} = \Omega \times [0, \infty)$ 中的调和函数, 其中 $\Omega$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的区域, 且在 $\partial\Omega \times [0, \infty)$ 上 $u = 0$. 同样设 $|u(x, t)| \leqslant M$. 证明: 当 $t \to \infty$ 时 $|u(x, t)| \to 0$.

**4.** $(3 + 3)$ 设 $A_1$ 与 $A_2$ 是 $C^\infty(K)$ 中函数的子集, $K$ 是平面上的单位圆, 使得分别有 $\varphi\big|_{x_1=0} = 0$ 及 $\varphi'_{x_1}\big|_{x_1=0} = 0$. 求这两个集合的闭包 $\bar{A}_1$ 与 $\bar{A}_2$ 在空间 $H^1(K)$ 中的余维数.

**5.** (4) 设 $K$ 是平面 $(x_1, x_2)$ 上的单位圆, $l_1$ 与 $l_2$ 是两个光滑曲线段, 它们相交于点 $O$, 其交角不等于零. 曲线 $l_1 \cup l_2$ 是否可能是调和函数的等位线? 说明理由.




**6.** (5) 设 $\Omega$ 是平面上的区域, $M$ 是 $\Omega$ 中的闭集并且空间 $\mathring{H}^1(\Omega)$ 与空间 $\mathring{H}^1(\Omega \setminus M)$ 在 $\Omega \setminus M$ 上重合. 证明: $\mu(M) = 0$.

**7.** (5) 考虑边值问题

$$\ddot{u} = u'' + f(x, t) \quad 在\ [0, \pi] \times [0, \infty)\ 内, \quad |f(x, t)| \leqslant M,$$
$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=\pi} = 0, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u'_t\big|_{t=0} = \psi(x),$$

其中 $M$ 是给定的常数. 是否可以选择 $f(x, t)$ 使得对所有的 $t > T_0$ 有 $u(x, t) \equiv 0$? 说明理由.

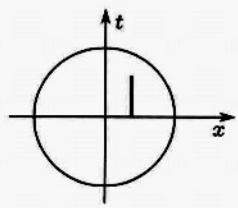
简化的样式: 如果 $f(x, t) = f(t)$, 考虑同上述一样的问题.

**8.** (3) 设 $u(x)$ 是球 $\text{Ш} \equiv \{|x| < 1\}$ 中的调和函数,

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = 0, \quad \forall x_0 \in \partial\text{Ш} \setminus x^*,$$

$x^*$ 是在 $\partial\text{Ш}$ 上的某个固定的点, 并且在球 Ш 内 $|u(x)| < M$. 在 Ш 内 $u \equiv 0$ 是否成立? 说明理由.

**9.** (3) 热传导方程 $u_t = u_{xx}$ 的解是否有如下图中的等位线?



# 参考文献


[1] Арнольд В. И. Лекции по уравнениям с частными производными—М.: Изд-во МК НМУ, 1995.
(有英译本:《Lectures on Partial Differential Equations》Roger Cooke 译, Springer 与 PHASIS)

[2] Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными—М.: Мир, 1966.—351 с.

[3] Бицадзе А. В., Калиниченко Д. Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики—М.:Наука, 1977.—222 с.

[4] Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике—2-е издание.—М.: Наука, 1972.—688 с.

[5] Владимиров В. С. Уравнения математической физики.—5-е издание.—М.: Наука, 1998.—512 с.

[6] Владимиров В. С. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики.—М.: Наука, 1982.—256 с.

[7] Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике.—2-е издание.—М.: Наука, 1979.—320 с.

[8] Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка.—М.: Наука, 1989.—463 с.

[9] Годунов С. К. Уравнения математической физики. Учебное пособие для студентов физико-математических специальностей университетов.—2-е издание.—М.: Наука, 1979.—392 с.

[10] Годунов С. К., Золотарева Е. В. Сборник задач по уравнениям математнческой физики. Учебное пособие.—Новосибирск: Изд-во Новосибирского гос. ун-та,

1987.—96 с.

[11] Горицкий А. Ю., Кружков С. Н., Чечкин Г. А. Уравнения с частными производными первого порядка. Учебное пособие.—М.: Издательство Центра прикл. исследований при мех-мат. ф-те МГУ, 1999.—96 с.

[12] Егоров Ю. В. Лекции по уравнениям с частными производными. Дополнительные главы. Учебное пособие для студентов, обучающихся по специальности《математика》.—М.: Изд-во МГУ, 1985.—164 с.

[13] Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа//УМН.—1962.—т. 17, вып. з.—с. 3—146 (см. также Труды семинара им. И. Г. Петровского.—2001.—т. 21.—с. 9—193.)

[14] Комеч А. И. Практическое решение уравнений математической физики. Учебно-методическое пособие для студентов университетов.—М.: Изд-во мех-мат ф-та МГУ, 1993.

[15] Курант Р. Уравнения с частными производными.—М.: Мир, 1964.

[16] Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики.—М.: Наука, 1973.

[17] Масленникова В. Н. Дифференциальные уравнения с частными производными. Учебное пособие.—2-е издание.—М.: Изд-во РУДН, 2000.—229 с.

[18] Мизохата С., Теория уравнений с частными производными.—М.: Мир, 1977.—504 с.

[19] Михайлов В. П. Лекции по уравнениям математической физики: учебное пособие для студентов вузов.—М.: Физматлит, 2001.—206 с.

[20] Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных.—М.: Наука, 1984.

[21] Олейник О. А. Лекции об уравнениях с частными производными. I часть.—М.: Изд-во мех-мат. ф-та Моск. ун-та, 1976.

[22] Олейник О. А. Лекции об уравнениях с частными производными. 2-е издание.—М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005.—252 с. (有根据俄文第三版的中译本: 奥列尼克 O A. 偏微分方程讲义 (第 3 版). 郭思旭译. 北京: 高等教育出版社, 2008.)

[23] Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными.—3-е издание.—М.: Физматгиз, 1961.—400 с. (有中译本: 彼得罗夫斯基 И Г. 偏微分方程讲义. 段虞荣译. 北京: 高等教育出版社, 1965.)

[24] Смирнов В. И. Курс высшей математики (Для механико-математических и физико-математических факультетов университетов).—М.: Физматгиз, 1959 (有中译本: 斯米尔诺夫 B И. 高等数学教程. 第一卷、第二卷 (分为 3 个分册): 孙念增译; 第三卷第一分册: 聂灵沼、丁石孙、王萼芳译, 第二、三分册叶彦谦译; 第四卷第一分册: 陈传璋译, 第二分册: 谷超豪、金福临译; 第五卷第一分册, 第二分册: 宋正译, 北京: 高等教育出版社, 1952—1959.)

[25] Смирнов М. М. Задачи по уравнениям математической физики. Учебное пособие.—6-е издание.—М.: Наука, 1975.—126 с.

[26] Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике.—3-е Издание.—М.: Наука, 1988.—336 с. (有根据原书 1950 年版译出的中译本: 索伯列夫 С Л. 泛函分析在数学物理中的应用. 王柔怀译. 北京: 科学出版社, 1959; 还有根据原著新版的译本: 索伯列夫 С. Л. 泛函分析在数学物理中的应用. 崔志勇译. 长春: 吉林大学出版社, 1990.)

[27] Соболев С. Л. Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщенных функций.—М.: Наука, 1989.—254 с.

[28] Соболев С. Л. Уравнения математической физики.—5-е издание.—М.: Наука, 1992.—432 с. (有 1954 年修订第 3 版的中译本: 索伯列夫 С Л. 数学物理方程. 钱敏等译. 北京: 高等教育出版社, 1958.)

[29] Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики.—6-е издание.—М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999.—798 с. (有 1953 年修订第 2 版的中译本: 吉洪诺夫 А Н, 萨马尔茨基 А А. 数学物理方程. 黄克欧等译. 北京: 高等教育出版社, 上册 1956, 下册 1957.)

[30] Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс.—2-е издание.—М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984.—208 с. (有根据原书 1961 年版的中译本: 希洛夫 Г Е. 数学分析专门教程. 董延闿译. 北京: 高等教育出版社, 1965.)

[31] Шубин М. А. Лекции об уравнениях математической физики.—М.: МЦНМО, 2001.—302 с.

[32] Эванс Л. К. Уравнения с частными производными—Новосибирск.: Изд-во《Тамара Рожковская》, 2003.

# 译者后记

本习题集就其所涉及的内容, 不仅仅是与某一本教材相配合的. 习题集的引论中所引的教材, 除了 O. A. 奥列尼克所著的《偏微分方程讲义》一书 (文献 [22]) 外, 涉及较多的还有 И. Г. 彼得罗夫斯基的《偏微分方程讲义》、A. H. 吉洪诺夫和 A. A. 萨马尔茨基的《数学物理方程》(上、下册) 这两种在我国曾广泛流传的教材 (文献 [23]、[29]), 以及尚未译成中文的另外两种教材 (B. C. 弗拉基米洛夫的《数学物理方程》和 B. П. 米哈伊洛夫的《偏微分方程》, 即本书所引文献 [5] 和 [20]). 因此, 本习题集的适用范围可能更广一些, 不仅仅限于数学专业. 从书末所附莫斯科大学历年试题也可以看出这一点.

在本书的翻译过程中, 如同在 O. A. 奥列尼克的《偏微分方程讲义》一书的翻译过程中一样, 译者一直得到武汉大学齐民友教授的耐心指教和释疑解惑. 避免了在名词和内容理解方面的一些错误. 因此首先要深深感谢齐先生对译者的指教和鼓励. 感谢挚友、高等教育出版社田文琪编审, 如同其他书稿的俄译中问题一样, 译者不断地以俄译中方面的问题请教他、麻烦他, 因而得以避免一些误译. 还要感谢北京大学李植教授, 译者曾多次向他请教有关莫斯科大学在学生考试规定方面的一些知识及力学名词. 如果没有他的指点与帮助, 在翻译考试样题部分中, 就会遇到很大困难.

徐伯勋先生十分耐心、仔细地审读了译稿, 使得译稿避免了不少疏漏; 蒋青副编审和胡乃冏编审分别对译稿作了复审和三审, 使得译稿能更准确地表达原意, 减少了疏漏. 译者衷心地感谢以上各位先生!

还要感谢本书责任编辑赵天夫同志, 在他的协调与帮助下, 本书得以按时出版. 由于译者水平所限, 不妥之处再所难免, 恳请读者、专家不吝指正.

译者

2009 年 2 月

[General Information]
书名=偏微分方程习题集
页数=53-78